

# Gruppenalgebra & Satz von Maschke

G. Chiusole

Sei  $V$  ein  $\mathbb{F}G$ -Modul. Dann wird im Folgenden die Abbildung  $G \times V \rightarrow V$  mit  $g.v$  bezeichnet um den Charakter der linken Gruppenwirkung zu verdeutlichen. Falls es im Kontext klar ist wird diese Konvention unterdrückt. Der folgende Text folgt im Wesentlichen "Representations and Characters of Groups" by G. James & M. Liebeck (2. Edition, 2008).

## 1 Morphismen von $\mathbb{F}G$ -Moduln

**Definition 1.** Seien  $V$  und  $W$   $\mathbb{F}G$ -Moduln. Eine Funktion  $\vartheta : V \rightarrow W$  heißt  **$\mathbb{F}G$ -Modul Homomorphismus**, falls  $\vartheta$  die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- (i) Homomorphie (additiv):  $\forall v_1, v_2 \in V : \vartheta(v_1 + v_2) = \vartheta(v_1) + \vartheta(v_2)$
- (ii)  $\mathbb{F}$ -Linearität:  $\forall v_1, v_2 \in V : \vartheta(v_1 + v_2) = \vartheta(v_1) + \vartheta(v_2)$
- (iii)  $G$ -Invarianz:  $\forall g \in G, v \in V : \vartheta(g.v) = g.\vartheta(v)$

also falls  $\vartheta$  eine  $\mathbb{F}$ -lineare Transformation zwischen den  $\mathbb{F}$ -Vektorräumen ist, und zusätzlich bezüglich der linken Gruppenwirkung von  $G$  invariant ist.

**Theorem 1.** Seien  $V$  und  $W$   $\mathbb{F}G$ -Moduln und  $\vartheta : V \rightarrow W$  ein  $\mathbb{F}G$ -Modul Homomorphismus. Dann sind

$$\ker \vartheta := \{v \in V \mid \vartheta(v) = 0\} \subseteq V \quad (1)$$

and

$$\text{Bild} \vartheta := \{w \in W \mid \exists v \in V : w = \vartheta(v)\} \subseteq W \quad (2)$$

$\mathbb{F}G$ -Untermoduln von  $V$  und  $W$ , respektive.

*Proof.* Da  $\vartheta$  im Speziellen ein Morphismus zwischen den Vektorräumen  $V$  und  $W$  ist, sind  $\ker \vartheta$  und  $\text{Bild} \vartheta$  im Speziellen Untervektorräume von  $V$  und  $W$ , respektive. Es bleibt also nur noch zu zeigen, dass diese Untervektorräume  $G$ -invariant sind.

Sei also  $v \in \ker \vartheta$ , also  $\vartheta(v) = 0$ . Dann gilt

$$\vartheta(g.v) = g.\vartheta(v) = g.0 = 0 \quad (3)$$

also  $g.v \in \ker \vartheta$ .

Sei  $w \in \text{Bild} \vartheta$ , also  $w = \vartheta(v)$  für ein  $v \in V$ . Dann gilt

$$g.w = g.\vartheta(v) = \vartheta(g.v) = \vartheta(v') \in \text{Bild} \quad (4)$$

also ist  $g.w \in \text{Bild}$ . □

## 2 Direkte Summen von $\mathbb{F}G$ -Moduln

**Definition 2.** Seien  $U$  und  $W$   $\mathbb{F}G$ -Moduln. Dann ist deren direkte Summe  $V = U \oplus W$  definiert als deren direkte Summe als Vektorräume. Die linke Gruppenwirkung folgt nun auf natürliche, sich jedes Element  $v \in U \oplus W$  schreiben lässt  $u = v + w$  für  $v \in U$  und  $w \in W$ . Also

$$\forall v \in V : g.v = g.(u + w) = g.u + g.w \quad . \quad (5)$$

*Remark 1.* Sei nun  $\mathfrak{B}_1 := \{u_1, \dots, u_n\}$  eine Basis für  $U$  und  $\mathfrak{B}_2 := \{w_1, \dots, w_m\}$  eine Basis für  $W$ . Dann ist  $\mathfrak{B} := \{u_1, \dots, u_n, w_1, \dots, w_m\}$  eine Basis von  $V$ . Sei  $[g]_{\mathfrak{B}}$  die Darstellung eines  $g \in G$  bezüglich der Matrix  $\mathfrak{B}$ . Dann gilt

$$[g]_{\mathfrak{B}} = \left( \begin{array}{c|c} [g]_{\mathfrak{B}_1} & 0 \\ \hline 0 & [g]_{\mathfrak{B}_2} \end{array} \right) \quad (6)$$

Das folgt aus direkt aus der  $G$ -Invarianz von  $\mathbb{F}G$ -Untermoduln. Im Allgemeinen lässt sich sagen: Wird ein  $g \in G$  durch eine Matrix in einer Basis  $B := \{b_1, \dots, \underbrace{b_k, \dots, b_m}_{=: \mathfrak{B}'}, \dots, b_n\}$  dargestellt,

wobei  $\mathfrak{B}'$  eine Basis eines  $\mathbb{F}G$ - Untermodul bilden, so sind die Einträge des Blocks unter und über den Einträgen  $([g]_{\mathfrak{B}, ij})_{k \leq i, j \leq m}$  gleich 0.

## 3 Gruppenalgebra

**Definition 3.** Sei  $G = \{g_1, \dots, g_n\}$  eine endliche Gruppe und sei  $\mathbb{F}$  ein Körper. Dann ist die die **Gruppenalgebra**  $\mathbb{F}[G]$  (oder  $\mathbb{F}G$ ) die Menge

$$\mathbb{F}[G] := \left\{ \sum_{g \in G} \lambda_g g \right\} \quad (7)$$

mit den Operationen

$$+ : \mathbb{F}[G] \times \mathbb{F}[G] \rightarrow \mathbb{F}[G]; \quad \sum_{g \in G} \lambda_g g + \sum_{g \in G} \mu_g g = \sum_{g \in G} (\lambda_g + \mu_g) g \quad (8)$$

$$\cdot : \mathbb{F}[G] \times \mathbb{F}[G] \rightarrow \mathbb{F}[G]; \quad \left( \sum_{g \in G} \lambda_g g \right) \cdot \left( \sum_{h \in G} \mu_h h \right) = \sum_{g \in G} \left( \sum_{h \in G} \lambda_{gh^{-1}} \mu_h \right) g = \sum_{g, h \in G} (\lambda_g \mu_h) (gh) \quad (9)$$

$$\cdot : \mathbb{F} \times \mathbb{F}[G] \rightarrow \mathbb{F}[G]; \quad \mu \cdot \left( \sum_{g \in G} \mu_g g \right) = \sum_{g \in G} (\mu \lambda_g) g \quad (10)$$

Ohne der letzten Operation nennt man  $\mathbb{F}[G]$  auch einen **Gruppenring** (von  $G$  über dem Körper  $\mathbb{F}$ ). Die Definition lässt sich in der offensichtlichen Weise auf  $\mathbb{F}$  ein Ring erweitern. Merke, dass in diesem Fall  $\mathbb{F}[G]$  (mit der letzten Operation) ein *freier* Modul über  $\mathbb{F}$  ist.

$\{g_1, \dots, g_n\}$  bezeichnet man als **die natürliche Basis von  $\mathbb{F}[G]$** .

Merke, dass  $\mathbb{F}[G]$  ein Vektorraum und mit der Multiplikation der Gruppenelemente als linke Gruppenwirkung

$$\cdot : G \times \mathbb{F}[G] \rightarrow \mathbb{F}[G]; \quad h \cdot \left( \sum_{g \in G} \mu_g g \right) = \sum_{g \in G} (\lambda_g) h.g \quad (11)$$

sogar ein  $\mathbb{F}G$ -Modul.

Den so erhaltenen  $\mathbb{F}G$ -Modul nennt man den **regulären  $\mathbb{F}G$ -Modul** und die Darstellung bezüglich der natürlichen Basis die **reguläre Darstellung von  $G$** .

*Remark 2.* Die reguläre Darstellung ist treu, da  $\forall g \in G : h.(\sum_{g \in G} \mu_g g) = \sum_{g \in G} (\lambda_g)g \Rightarrow h = e$ , wobei  $e$  das neutrale Element in  $G$  ist.

## 4 Satz von Maschke

**Theorem 2** (Maschke, 1899). *Sei  $G$  eine endliche Gruppe und  $\mathbb{F}$  ein Körper mit  $\text{char}(\mathbb{F}) \nmid |G|$ . Sei  $V$  ein  $\mathbb{F}G$ -Modul und  $U$  ein  $\mathbb{F}G$ -Untermodule. Dann existiert ein  $\mathbb{F}G$ -Untermodule  $W$  von  $V$ , sodass  $V = U \oplus W$ .*

*Proof.* Mittels Basisergänzung lässt sich ein  $W_0$  finden, sodass  $V = U \oplus W_0$ . Dann lässt sich jedes  $v \in V$  schreiben als  $v = u + w$  für  $u \in U$  und  $w \in W_0$ . Definiere:  $\phi : V \rightarrow V$  mittels  $\phi(v) = u$ .  $\phi$  ist eine Projektion mit  $\ker(\phi) = W_0$  und  $\text{Bild}(\phi) = U$ . Wir werden im folgenden mit Hilfe von  $\phi$  einen projektiven  $\mathbb{F}G$ -Homomorphismus konstruieren, sodass  $\ker(\phi) = U$ .

Definiere  $\vartheta : V \rightarrow V$  einen  $\mathbb{F}G$ -Homomorphismus sodass  $\forall v \in V$ :

$$\vartheta(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1} \cdot (\phi(g.v)) \quad (12)$$

$\vartheta$  ist per Konstruktion ein Endomorphismus im Sinne des Vektorraumes  $V$ . Weiters ist  $\vartheta$  ein  $\mathbb{F}G$ -Homomorphismus: Sei  $x \in G$ . Dann gilt

$$\vartheta(x.v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1} \cdot (\phi(g.(x.v))) \quad (13)$$

Mit  $gx =: h \in G$  bzw.  $g^{-1} = xh^{-1}$  folgt

$$\vartheta(x.v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} x \cdot (h^{-1} \cdot (\phi(h.v))) = x \cdot \vartheta(v) \quad . \quad (14)$$

Wir zeigen nun, dass  $\vartheta$  eine Projektion ist, also dass  $\vartheta^2(v) = \vartheta(v)$ . Sei also  $v = u + w$ . Dann folgt mittels  $U$  ein  $\mathbb{F}G$ -Modul:

$$\vartheta(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1} \cdot (\phi(g.v)) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1} \cdot (\phi(g.u)) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1} \cdot u = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} u' = u' \quad . \quad (15)$$

Merke nun zunächst, dass  $\forall u \in U, g \in G : g.u \in U$ , da  $U$  ein  $\mathbb{F}G$ -Untermodule ist. Also gilt  $\phi(g.u) = g.u$ . Damit gilt

$$\vartheta(u') = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1} \cdot (\phi(g.u')) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1} \cdot (g.u') = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} u' = u' \quad . \quad (16)$$

Per Konstruktion ist nun  $\text{Bild}(\vartheta) = U$ . Man definiere nun  $W := \ker(\vartheta)$ . Dann folgt, mit  $\vartheta$  einer Projektion

$$V = U \oplus W \quad , \quad (17)$$

was nun eine direkte Summe aus  $\mathbb{F}G$ -Untermodule ist. □

Mittels Induktion folgt nun, dass jeder  $\mathbb{F}G$ -Module, welcher einen  $\mathbb{F}G$ -Untermodule besitzt (also nicht irreduzibel ist) eine direkte Summe aus  $\mathbb{F}G$ -Untermodule ist.

## References

- [JL] G. James, M. Liebeck, *Representations and characters of groups. Second edition*, Cambridge University Press, 2001.