Über das Lemma von Yoneda in Kategorien Theorie

G. Chiusole

Zusammenfassung

Das folgende Essay soll kurz und bündig das Lemma von Yoneda, zusammen mit dessen Korollaren, Interpretationen und Implikationen, vorstellen und erklären. Im Grunde macht das Lemma Aussage über eine essentielle Korrespondenz zwischen der Menge natürlicher Transformationen zwischen zwei Funktoren $\mathfrak{h}^A, \mathfrak{f} \in \mathtt{Nat}(\mathbf{C}, \mathbf{Set})$ und der Menge $\mathfrak{f}(A)$. Es ist dadurch möglich einen solchen Funktor mit einem Element aus $\mathfrak{f}(A)$ zu identifizieren und dadurch zu repräsentieren. Solch ein sog. allgemeines Element bietet ein Werkzeug, durch welches sehr komplexe Funktoren durch (vergleichsweise) simple Elemente dargestellt werden können. Gleichzeitig ist Yonedas Arbeit ein mächtiger Hilfssatz in der Konstruktion von Isomorphismen - allen voran die Yoneda Einbettung.

1 Einführung

Auch wenn das Lemma von Yoneda in einer ausschließlich algebraischen Form verstanden werden kann [Pratt, 2009] wollen wir uns mit ihm im Kontext befassen, in welchem es entwickelt wurde, nämlich der Kategorien Theorie (KT). Die Entwicklung der KT in der heutigen, axiomatischen Form begann kurz nach dem Ende des zweiten Weltkrieges. Ursprünglich von S. Mac Lane und S. Eilenberg entwickelt, entstand die Theorie auf natürliche Weise aus deren Forschung in algebraischer Topologie. Kurzgefasst ist eine Kategorie eine Kollektion von *Objekten* und *Morphismen* zwischen diesen, sowie die Existenz einer Form von Komposition dieser Morphismen (natürlich gewissen Axiomen unterworfen). KT ist dann natürlich die Erforschung solcher Kategorien, aber was noch viel wichtiger ist, der Morphismen (in Kategorien, zwischen ihnen, sowie zwischen Morphismen selbst, usw.). Das Lemma selbst wurde in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhundert entwickelt. Es ist sicherlich eines der wichtigsten, wenn nicht sogar das wichtigste Resultat in KT.
Die ursprüngliche Motivation für KT war es algebraische Topologie durch struktur-erhaltende Morphismen (Homomorphismen) besser zu verstehen - ein Ansatz, welcher schon zu Beginn des 20. Jahrhunderts von E. Noether in ihrer Forschung algebraischer Ringe genutzt wurde. Während klassische Mengentheorie algebraische Strukturen von Innen heraus zu beschreiben versucht, gibt KT eine externe Ansicht der universellen Algebra. In diesem Sinne stellt das Lemma von Yoneda eine Brücke zwischen der internen und der externen Ansicht dar.

2 Yoneda Lemma

Wir beginnen prompt damit das besagte Lemma anzuschreiben:

Lemma. *Es sei* $\mathbf{C}$ *eine lokal kleine Kategorie* [1] *und* $\mathbf{Set}$ *die Kategorie der Mengen. Weiters sei* $\mathfrak{h}^A : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{Set}$ *ein partieller Hom-Funktor am festen Objekt* $A \in \mathbf{C}$ *und* $\mathfrak{f} : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{Set}$ *ein kovarianter Funktor. Dann existiert eine natürliche Bijektion zwischen der Menge der natürlichen Transformationen zwischen* $\mathfrak{h}^A$ *und* $\mathfrak{f}$*, sowie der Menge* $\mathfrak{f}A$*. Es existiert also ein* $\Gamma : \mathtt{Nat}(\mathbf{C}, \mathbf{Set})(\mathfrak{h}^A, \mathfrak{f}) \longrightarrow \mathfrak{f}A$*, welche injektiv, surjektiv, und natürlich ist.*

Beweis. Wir behaupten, dass $\Gamma : \eta \mapsto \eta_A(id_A)$ solch eine Bijektion ist. Um den Fluss dieses Artikels nicht zu unterbrechen präsentieren wir das folgende Diagramm als Ersatz für einen formalen Beweis. Durch Diagrammjagd lässt sich die Injektivität und Natürlichkeit von Γ zeigen; durch die Konstruktion expliziter natürlicher Transformationen $\mathfrak{h}^A A \longrightarrow \mathfrak{f}A$ die Surjektivität.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "a"'] & \mathfrak{h}^A A = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "\mathfrak{h}^A a"'] & \mathfrak{f}A \arrow[d, "\mathfrak{f}a"'] & id_A \arrow[r, mapsto, "\eta_A"] \arrow[d, mapsto, "a \circ -"'] & \eta_A(id_A) \arrow[d, mapsto, "\mathfrak{f}a"'] \\
B & \mathfrak{h}^A B \arrow[r, "\eta_B"] & \mathfrak{f}B & a \circ id_A = a \arrow[r, mapsto, "\eta_B"] & \eta_B(a) = \mathfrak{f}a(\eta_A(id_A))
\end{tikzcd}
$$

Ein formaler Beweis ist in [Hedman, 2016] zu finden. □

[1] Von hier an soll jede Kategorie als lokal klein verstanden werden. Weiters sind Einzigartigkeiten immer nur bis zu Isomorphismus zu verstehen.

3 Interpretation und Korollare

Zweifelsohne hat das Lemma seine bedeutendsten Anwendungen in den fortgeschritteneren und abstrakteren Gebieten der Mathematik, wie beispielsweise Gruppen-Kohomologie, Topos Theorie, sowie algebraische Topologie und Geometrie im Allgemeinen - mit Sicherheit Themen, über welche ich mich nicht traue zu schreiben als ob ich sie verstehen würde. Aus diesem Grund werden wir uns mit etwas simpleren, aber nicht weniger anschaulicheren Beispielen begnügen.

3.1 „Zeig mir deine Freunde, und ich sage dir wer du bist.“- Yonedas Einbettung

Ganz abstrakt wollen wir nun einen Funktor konstruieren, welcher auf sehr natürliche Weise in der Behandlung von Hom-Funktoren auftritt. Es handelt sich um einen solchen, welcher einem festen Objekt in $A \in \mathbf{C}$ seinen entsprechenden partiellen Hom-Funktor $\mathfrak{h}^A$ zuordnet, welcher wiederum einem Objekt X die Hom-Menge $\mathrm{Hom}(A, X)$ zuordnet: der sog. Yoneda Funktor. Wie fordern also die Eigenschaft $A \mapsto \mathfrak{h}^A$. Per Definition von $\mathfrak{h}^A$ ist die Co-Domäne von $\mathfrak{h}^-$ die Funktor-Kategorie $\mathtt{Funct}[\mathbf{C}, \mathbf{Set}]$. Mit unserer später folgenden Anwendung in Aussicht, werden wir allerdings direkt mit der Konstruktion des Dual-Funktors $\mathfrak{h}_- : \mathbf{C} \longrightarrow \mathtt{Funct}[\mathbf{C}^{op}, \mathbf{Set}]$ fortsetzen. Wir definieren folgendermaßen:

$$\mathfrak{h}_- : \mathbf{C} \longrightarrow \mathtt{Funct}[\mathbf{C}^{op}, \mathbf{Set}] \tag{1}$$

$$A \mapsto \big(\mathfrak{h}_A : X \mapsto \mathrm{Hom}(X, A)\big) \; . \tag{2}$$

Die Definition der Wirkung von $\mathfrak{h}_-$ auf einen Morphismus $f : A \longrightarrow B$ folgt durch Observation des folgenden Diagramms in der Kategorie der Mengen. Im mittleren Diagramm studieren wir $\mathfrak{h}_A$ und $\mathfrak{h}_B$ durch ihre Wirkung auf beliebige Objekte in $\mathbf{C}$ (also auf Objekte ihrer Domäne).

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathfrak{h}_-"'] & B \arrow[d, "\mathfrak{h}_-"'] \\ \mathfrak{h}_A \arrow[r, "\mathfrak{h}_f"] & \mathfrak{h}_B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathfrak{h}_A(X) = \mathrm{Hom}(X, A) \arrow[d, "\mathfrak{h}_f(X)"'] \\ \mathfrak{h}_B(X) = \mathrm{Hom}(X, B) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A & X \arrow[l, "a"'] \arrow[d, "\mathfrak{h}_f(X)(a)"] \\ & B \arrow[ul, "f"] \end{tikzcd}$$

Deshalb $\mathfrak{h}_f(X) : a \mapsto f \circ a$.
Die Definition von $\mathfrak{h}_f$ (natürlich folgend aus $\mathfrak{h}_X$) führt dazu, dass $\mathfrak{h}_-$ kovariant ist; und so $\mathfrak{h}_- : \mathbf{C} \longrightarrow \mathtt{Funct}[\mathbf{C}^{op}, \mathbf{Set}]$. Tatsächlich, wenn wir ein bestimmtes $\mathfrak{h}_X$ als kontravariant annehmen, muss der Funktor dessen Abbild $\mathfrak{h}_X$ ist, zwingend kovariant sein. Natürlich gilt das Gegenteil für den Dual-Funktor $\mathfrak{h}^- : X \mapsto \mathfrak{h}^X$. Das zwingt $\mathfrak{h}^-$ ein Funktor der Form $\mathbf{C}^{op} \longrightarrow \mathtt{Funct}[\mathbf{C}, \mathbf{Set}]$ zu sein.

Satz. *Der kovariante Yoneda Funktor $\mathfrak{h}_-$ ist voll und treu und daher eine Einbettung von $\mathbf{C}$ in die korrespondierende Kategorie der Pre-Sheaves $\mathtt{Funct}[\mathbf{C}^{op}, \mathbf{Set}]$. Also $\mathbf{C} \hookrightarrow \mathtt{Funct}[\mathbf{C}^{op}, \mathbf{Set}]$.*

Beweis. Man nutze das Yoneda Lemma und definiere $\mathfrak{f} := \mathfrak{h}_B$. Dann folgt $\mathtt{Nat}(\mathbf{C}^{op}, \mathbf{Set})(\mathfrak{h}_A, \mathfrak{h}_B) \simeq \mathrm{Hom}(A, B)$. Die natürlichen Transformationen zwischen den Funktoren $\mathfrak{h}_A$ und $\mathfrak{h}_B$ stehen also in eindeutiger Korrespondenz mit den Morphismen zwischen den Objekten A und B. Durch Wirkung von $\mathfrak{h}_A$ und $\mathfrak{h}_B$ auf ein Objekt $X \in \mathbf{C}$ erhalten wir $\big(\mathrm{Hom}(X, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X, B)\big) \simeq \mathrm{Hom}(A, B)$. $\mathfrak{h}_-$ ist offensichtlich eine Bijektion bezüglich den Objekten in $\mathbf{C}$. Zusammen mit den oben abgebildeten Diagrammen ist nun klar dass $\mathfrak{h}_-$ auch bijektiv bezüglich der Morphismen ist. Folglich ist $\mathfrak{h}_-$ bijektiv und funktorial und somit eine Einbettung. $\square$

Ein analoges Ergebnis gilt für den kontravarianten Yoneda Funktor $\mathfrak{h}^- : \mathbf{C}^{op} \longrightarrow \mathtt{Funct}[\mathbf{C}, \mathbf{Set}]$. Man beachte jedoch die Umkehrung der Morphismen durch die Kontravarianz von $\mathfrak{h}^-$.
Man kann daher schließen, dass das Objekt A vollkommen durch seine Relation zu anderen Objekten determiniert ist; also durch die Hom-Mengen zu ihnen. Z. B. ist in der Kategorie der Mengen **Set** jede Menge A vollkommen durch die Hom-Menge $\mathrm{Hom}(\mathbb{1}, A)$ mit dem Endobjekt $\mathbb{1}$ determiniert. In anderen Kategorien kann es durchaus sein, dass eine solche Charakterisierung nicht mit nur einer Menge funktioniert. Man betrachte z. B. die Kategorie der Gruppen **Grp**, in welcher $\forall G_1, G_2 : \mathrm{Hom}(\mathbb{1}, G_1) = \mathrm{Hom}(\mathbb{1}, G_2) = \{1_{\mathbb{1}} \mapsto 1_G\}$ gilt (mit 1 als Identität gegenüber der Gruppenoperation). Hier garantiert einem die Yoneda Einbettung, dass (zumindest) die Gesamtheit aller Hom-Mengen genug Information gibt, um das Objekt A vollständig zu rekonstruieren.
In den Worten von B. Mazur, „Thinking about Grothendieck “(qtd. in [Riehl, 2017])

> [...] a mathematical object X is best thought of in the context of a category surrounding it, and is determined by the network of relations it enjoys with all the objects of that category. Moreover, to understand X it might be more germane to deal directly with the functor representing it.

3.2 Repräsentation von Funktoren und Pre-Sheaves

Eine weitere (etwas konkretere) Interpretation/Anwendung ergibt sich durch das folgende Korollar. Wieder, mit der Anwendung im Hinterkopf wählen wir die kovariante Version. Zuerst jedoch erinnere man sich an die Definition einer Repräsentation eines repräsentierbaren Funktors $\mathfrak{f} : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{Set}$: Sie ist ein Paar $(A \in \mathbf{C}, \alpha : \mathfrak{h}^A \longrightarrow \mathfrak{f})$, bestehend aus einem Objekt der unterliegenden Kategorie sowie einem natürlichen Isomorphismus vom kovarianten, partiellen Hom-Funktor an eben diesem Objekt zu dem Funktor $\mathfrak{f}$. [Barr und Wells, 2000]

Korollar. *Für jede Repräsentation* $(A \in \mathbf{C}, \alpha : \mathfrak{h}^A \longrightarrow \mathfrak{f})$*, existiert ein einziges Paar* $(A \in \mathbf{C}, x \in \mathfrak{f}(A))$ *sodass das folgende Diagramm kommutiert. Daher* $(\mathfrak{f}a)u = v$*.*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[d, "\mathfrak{f}"'] & A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "\mathfrak{f}"'] & B \arrow[d, "\mathfrak{f}"] & x \arrow[r, mapsto, "a"] \arrow[d, mapsto, "\mathfrak{f}"'] & y \arrow[d, mapsto, "\mathfrak{f}"] \\ \mathbf{Set} & \mathfrak{f}A \arrow[r, "\mathfrak{f}a"] & \mathfrak{f}B & u \arrow[r, mapsto, "\mathfrak{f}a"] & v \end{tikzcd}$$

Beweis. Man betrachte ein bestimmtes $\alpha : \mathfrak{h}^A \longrightarrow \mathfrak{f}$. Das Resultat folgt. □

Es existieren also zwei verschiedene Möglichkeiten repräsentierbare Funktoren und Pre-Sheaves darzustellen. Das folgende Beispiel soll das veranschaulichen. [Leinster, 2000]

Beispiel. Man betrachte die Kategorie der $\Bbbk$-Vektorräume **Vec**, die beiden Objekte $U, V \in \mathbf{Vec}$ sowie den kovarianten Funktor

$$\mathfrak{b}^{U,V} : \mathbf{Vec} \longrightarrow \mathbf{Set} \tag{3}$$
$$W \mapsto \mathrm{BiLin}(U, V; W)\ . \tag{4}$$

Dieser Funktor $\mathfrak{b}^{U,V}$ kann nun durch die folgenden beiden Arten repräsentiert werden:

(a) Ein $\Bbbk$-Vektorraum $T \in \mathbf{Vec}$ und ein natürlicher Isomorphismus $\alpha : \mathfrak{h}^T \longrightarrow \mathfrak{b}^{U,V}$. In vertrauteren Begriffen sind das der Vektorraum („Tensorraum“) T sowie die multi-lineare Bijektion $\alpha : \mathbf{Vec}(T, W) \simeq \mathbf{Vec}(U, V; W)$.

(b) Ein $\Bbbk$-Vektorraum $T \in \mathbf{Vec}$ und ein Element $\mathfrak{b}^{U,V}(W) = \mathrm{BiLin}(U, V; W)$. Also eine bi-lineare Funktion $h \in \mathbf{Vec}(U, V; T) : U \times V \longrightarrow T$ sodass das folgende Diagramm kommutiert. Daher $s \mapsto \mathfrak{f}a \circ s$.

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "a"] \arrow[d, "\mathfrak{f}"'] & S \arrow[d, "\mathfrak{f}"'] & & U \times V \arrow[r, "t"] \arrow[dr, "s"'] & T \arrow[d, "\mathfrak{f}a"] \\ \underbrace{t \in \mathfrak{b}^{U,V}T}_{=\mathrm{BiLin}(U,V;T)} \arrow[r, "\mathfrak{f}a"] & \underbrace{s \in \mathfrak{b}^{U,V}S}_{=\mathrm{BiLin}(U,V;S)} & \text{daher} & & S \end{tikzcd}$$

Alles in allem zeigt der folgende Witz sehr schön die Wichtigkeit des Yoneda Lemmas:

Ein Student fragt scherzhaft: „Wie bekommt man einen Elefanten in einen Kühlschrank?“
„Ich bin sicher es ist ein Spezialfall des Yoneda Lemmas?“antwortet der Kategorien-Theoretiker.[Smith, 2010]

Literatur

[Barr und Wells 2000] Barr, Michael ; Wells, Charles: Toposes, Triples, and Theories. (2000), S. 23–24

[Hedman 2016] Hedman, Jonas: 2-Categories and Yoneda lemma. (2016), S. 42–46

[Leinster 2000] Leinster, Tom: The Yoneda Lemma: What’s It All About? (2000), S. 6–7

[Pratt 2009] Pratt, Vaughan: The Yoneda Lemma without Category Theory: Algebra and Applications. (2009)

[Riehl 2017] Riehl, Emily: *Category Theory in Context*. Courier Dover Publications, 2017

[Smith 2010] Smith, Robert: *A Joke*. 2010. – URL http://symbolics.com/blog/?p=389. – Zugriffsdatum: 2018-06-07