



# HTBLuVA Mödling

## Bautechnik - Hochbau

### Lehr- und Tabellenbuch für Probleme der Baustatik und der Festigkeitslehre

**Verfasst von** CHIUSOLE Gideon  
WIENER Markus

**Betreut von** Prof. DI. Dr. techn. PALKA Michael

**Wir versichern:**

dass wir die Diplomarbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt und uns auch sonst keiner unerlaubten Hilfe bedient haben.

Unterschrift1: \_\_\_\_\_

Unterschrift2: \_\_\_\_\_

Mödling, am 05.04.2017

Einreichung / Abgabe: \_\_\_\_\_ Unterschrift: \_\_\_\_\_

## DIPLOMARBEIT DOKUMENTATION

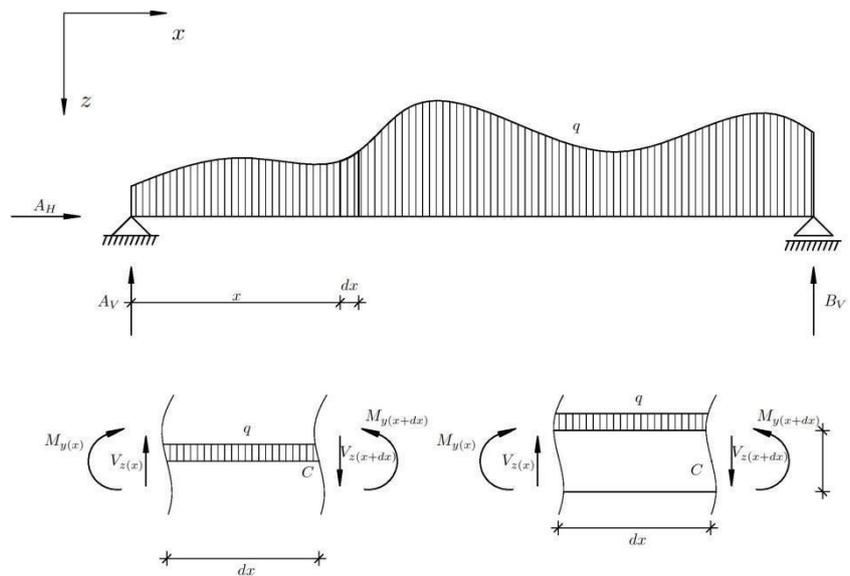
Namen der Verfasser/innen	CHIUSOLE, Gideon WIENER, Markus
Jahrgang / Klasse Schuljahr	2016/17 5BHBTH
Thema der Diplomarbeit	Lehr- und Tabellenbuch für Probleme der Baustatik und der Festigkeitslehre

Aufgabenstellung	Die Aufgabe ist es ein Buch zur Statik und Festigkeitslehre zu erstellen. Während sich viele vorhandene Publikationen entweder auf das Eine oder das Andere fokussieren, soll diese Arbeit zunächst die Theorien in weitreichender Form herleiten und beweisen, um im Anschluss mit Hilfe von Tabellen und zweckmäßigen Erläuterungen den Übergang in die Baupraxis darzulegen. Durch die Verwendung zahlreicher Fachliteratur sollen die grundlegenden Konzepte in didaktischer Form erarbeitet und dem Leser vorgeführt werden.
------------------	---

Realisierung	Die Arbeit sollte über das laufende Schuljahr 2016/17, sowie die vorhergehenden Sommerferien realisiert werden. Zunächst wurden Grundlagenforschungen angestellt um sich mit der Thematik, sowie dem zu verwendenden Programm „Latex“, vertraut zu machen. Im Anschluss wurden Anwendungssituationen entwickelt, Vergleichsanalysen durchgeführt und Normenvergleiche geführt. Die Meilensteine hierfür sind im Anhang zu finden.
--------------	---

Ergebnisse	Die Arbeit brachte ein leserfreundliches Buch hervor, welches sowohl didaktisch, als wie auch technisch auf dem höchsten Stand ist. Abbildungen und Notizen machen das Buch für den Unterricht, Tabellen für die Praxis geeignet.
------------	---

Typische Grafik, Foto etc.  
(mit Erläuterung)



Die obige Abbildung zeigt eine essentielle Skizze für die Erläuterung der Identität d. h. den differentialen Zusammenhang der Schnittgrößen in einem gerade, prismatischen Stab, welche im Abschnitt 8.3 zu finden ist.

Möglichkeiten der  
Einsichtnahme in die Arbeit

Die Arbeit kann in der Bibliothek der Bautechnik an der HTL Mödling eingesehen werden.

Approbation  
(Datum / Unterschrift)

Prüfer/in

Abteilungsvorstand / Direktor/in

## DIPLOMA THESIS Documentation

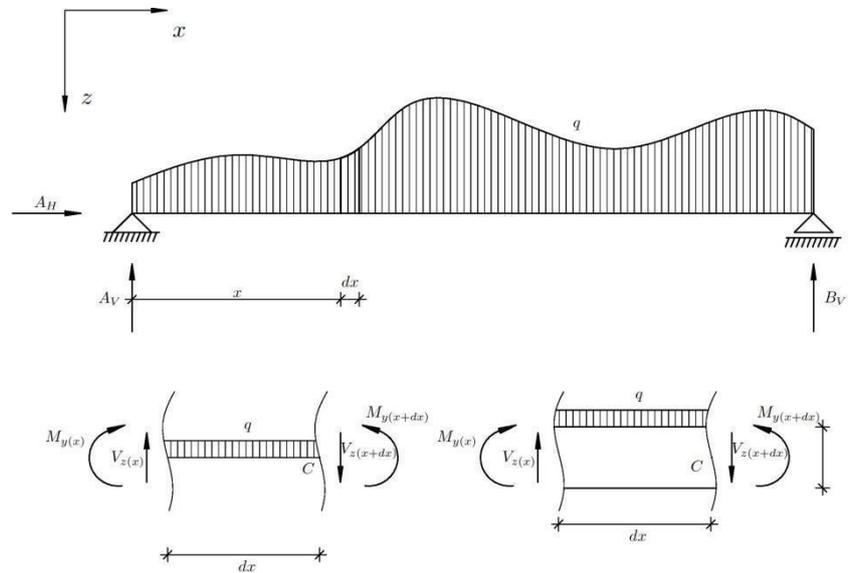
Author(s)	CHIUSOLE, Gideon WIENER, Markus
Form Academic year	2016/17 5BHBTH
Topic	Book on the solutions to problems of structural analysis and solid-state continuum mechanics

Assignment of tasks	The assigned task is to write a book about solutions to problems of structural analysis and solid-state continuum mechanics. Since other publications of such kind tend to focus on rather one of the two, this book is supposed to firstly show and prove the theory and then proceed to use tables and useful explanations to provide a connection to the practical side.
---------------------	---

Realization	The assignment shall be fulfilled over the course of the academic year of 2016/17 in conjunction with the preceding summer holidays. During the first period, research was done to become fluent with the subject as well as the publication software „Latex“. The following sections of the project were devoted to the development of individual situational application, comparative analysis as well as comparisons with the existing Austrian and European Standards. The corresponding milestones are to be found in the attachments.
-------------	---

Results	The result was a reader friendly book in the aspect of didactic methodology as well as scientific accuracy and standard. Figures and notes throughout the text provide for usability in the classroom, while tables make it easily usable in the office.
---------	--

Illustrative graph, photo  
(incl. explanation)



The figure above shows an essential drawing of the theorems on the differential identities of the functions of load, shear and momentum that act upon a straight, prismatic beam. The corresponding chapter may be found under 8.3.

Accessibility diploma thesis	of	The thesis is accessible in the library for construction engineering of HTL Mödling.
---------------------------------	----	--

Approval (Date / Sign)	Examiner	Head of Department / College
---------------------------	----------	------------------------------



## Kurzfassung

Die Arbeit befasst sich mit der Erstellung eines Buches zum Gebiet der Statik und Festigkeitslehre, bezogen auf die Bautechnik. Sie widmet sich daher einem Teil der Mechanik.

Eine Problemstellung bat sich in der Form des zu benutzenden Programmes „Latex“, welche zuerst völlig neu erlernt werden musste. Um der Anforderung einer professionellen Publikation gerecht zu werden entschied man sich für Latex, was sich als großer Vorteil in der Bewältigung der zahlreichen Verweise, Abbildungen und Formeln erwies. Für die Erstellung der Grafiken und Skizzen entschied man sich für Nemetschek Allplan.

Das Buch teilt sich in zwei Hauptteile, welche allerdings fließend in einander übergehen und auch teilweise überschneiden: Tragwerkslehre und Mechanik.

Nach einer Einleitung folgen die ersten Kapitel wie „Grundlagen der Tragwerkslehre“ und „Grundlegende Kräftetheorie“, welche sich dem Aufbau der Grundlagen widmen. Im Anschluss wird seitens der Tragwerkslehre das Gebiet der Zustandsgrößen behandelt, während die Festigkeitslehre die Spannungen und Deformationen, sowie deren Zusammenhänge in einem Kontinuum untersucht. Sie beide bilden den Aufbau für die Formulierung der letzten Kapitel, wie „Spannungen am Stabkörper“, „Stabilitätsprobleme“, „Arbeit“ und „Ö NORM EN 1990“. Sie gehen auf die konkrete Nachweisführung von Querschnitten und Materialien ein.

Das Ergebnis der Arbeit ist ein publikationsreifes Buch, welches sowohl für den Studenten, sowie auch Anwender zweckdienlich ist.



## **Abstract**

The thesis is a book about structural analysis and solid-state continuum mechanics. Therefore, it is part of the field of solid-state mechanics.

The chosen software for the publication “Latex” turned out to be a challenge, as it had to be studied thoroughly prior to writing the thesis. Yet it turned out in favor, especially concerning the numerous references, figures and formulas. In order to create the drawings, Nemetschek Allplan was used.

The book is split into two main parts, which tend to interact and overlap with each other: structural design and analysis, and solid-state continuum mechanics.

After an introduction, the first chapters like “Fundamental Structural Design” or “Theory of Forces” follow, as they introduce the fundamental theorems and techniques of their respective subject. In the following, the theories of state functions as well as stress, strain and linear elasticity are covered. Both build the foundation for the last part of the book. Finally, the chapters like “strain of beam structures”, “The Theory of Stability” as well as “Ö NORM EN 1990” provide the actual prove of compliance with the mechanical strength of the materials.

The result of the publication is a book ready for publication, which is useful for the student as well as the practitioner.



## Diplomanden



### Gideon Chiusole

**Geburtstag, -ort:** 09.08.1998, Wien  
**Wohnort:** 2331, Vösendorf  
**Aufgaben:** Grundlagenermittlung,  
Algorithmen entwickeln,  
Normenvergleiche  
führen  
**Tätigkeiten:** Kapitel 2, 3, 6 - 14



### Markus Wiener

**Geburtstag, -ort:** 12.09.1998, Wien  
**Wohnort:** 2551, Enzesfeld  
**Aufgaben:** Anwendungssituationen  
vergleichen,  
Ergebnisanalyse,  
Normenvergleiche  
anwenden  
**Tätigkeiten:** Vorwort, Kapitel 1, 4, 5,  
15, 16, Anhänge

## Betreuer



### Prof. DI. Dr. techn. Michael Palka

**Geburtstag, -ort:** 01.01.1965, Wien  
**Wohnort:** 2340, Mödling

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>xvii</b>
<b>1 Überblick über die Statik, Festigkeits- und Tragwerkslehre</b>	<b>1</b>
1.1 Unterteilung aufgrund des Körpers . . . . .	1
1.1.1 Kontinuumsmechanik . . . . .	1
1.1.2 Stereomechanik . . . . .	2
1.1.3 Elasto- und Plastomechanik . . . . .	3
1.1.4 Fluidmechanik . . . . .	4
1.2 Unterteilung aufgrund des mechanischen Vorganges . . . . .	5
1.2.1 Kinematik . . . . .	5
1.2.2 Dynamik . . . . .	5
1.2.3 Statik . . . . .	6
1.2.4 Kinetik . . . . .	6
1.3 Unterteilung aufgrund der Methodik . . . . .	7
1.3.1 Theoretische Mechanik . . . . .	7
1.3.2 Experimentelle Mechanik . . . . .	7
1.3.3 Statistische Mechanik . . . . .	8
1.3.4 Technische Mechanik . . . . .	8
1.4 Mischdisziplinen . . . . .	9
1.4.1 Festigkeitslehre . . . . .	9
1.4.2 Tragwerkslehre . . . . .	10

<i>INHALTSVERZEICHNIS</i>	x
1.5 Modellbildung in der Statik, Tragwerks- und Festigkeitslehre . . .	10
<b>2 Grundlegende Kräftetheorie</b>	<b>12</b>
2.1 Definition der Kraft . . . . .	12
2.2 Definition des Drehmoments . . . . .	15
2.3 Das Kraftsystem . . . . .	17
2.3.1 I. Kraftsystem im Gleichgewicht . . . . .	18
2.3.2 II. Momentenfreies Kraftsystem . . . . .	20
2.3.3 III. Kraftfreies Kraftsystem . . . . .	23
2.3.4 IV. Allgemeines Kraftsystem . . . . .	27
<b>3 Querschnitte</b>	<b>31</b>
3.1 Flächenmoment 0. Ordnung - Fläche $A$ . . . . .	32
3.2 Flächenmoment 1. Ordnung - statisches Moment $S$ . . . . .	34
3.3 Flächenmoment 2. Ordnung - Flächenträgheitsmoment $I$ . . . . .	43
3.3.1 Axiales Flächenträgheitsmoment $I_y$ u $I_z$ . . . . .	43
3.3.2 Deviationsmoment $I_{yz}$ . . . . .	47
3.3.3 Polares Flächenträgheitsmoment $I_p$ . . . . .	50
3.4 Kennwerte ausgewählter Querschnitte . . . . .	52
<b>4 Grundlagen der Tragwerkslehre</b>	<b>56</b>
4.1 Definition eines Tragwerks . . . . .	56
4.2 Bestandteile eines Tragwerks . . . . .	60
4.2.1 Stäbe und Balken . . . . .	60
4.2.2 Auflager . . . . .	61
4.2.3 Federungen . . . . .	64
4.2.4 Lasten . . . . .	66
4.2.5 Knotenpunkte . . . . .	68
4.2.6 (Zwangs-) Verformungen . . . . .	72
4.2.7 Federhafte Knoten . . . . .	75

4.3	Gleichgewicht eines Tragwerks . . . . .	77
4.3.1	Definition des Gleichgewicht . . . . .	77
4.3.2	Nachweis des Gleichgewichts . . . . .	81
<b>5</b>	<b>Zustandsgrößen und deren Bestimmung</b>	<b>98</b>
5.1	Allgemeines . . . . .	98
5.1.1	Zustandsgrößen und Prozessgrößen . . . . .	98
5.1.2	Überblick über die Zustandsgrößen in der Tragwerkslehre	99
5.1.3	Globales und lokales Koordinatensystem . . . . .	100
5.2	Erläuterung der Zustandsgrößen in der Tragwerkslehre . . . . .	103
5.2.1	Lasten . . . . .	103
5.2.2	Auflagerreaktionen . . . . .	104
5.2.3	Schnittgrößen . . . . .	106
5.2.4	Verformungen . . . . .	107
5.2.5	Verzerrungen . . . . .	108
5.2.6	Zusammenhang der Zustandsgrößen . . . . .	110
5.3	Schnittkräfte . . . . .	112
5.3.1	Allgemeines . . . . .	112
5.3.2	Mathematische Beschreibung und Berechnung . . . . .	118
5.3.3	Schnittgrößen an Ecken . . . . .	132
5.3.4	Gabelungen . . . . .	143
5.3.5	Schnittgrößen an gekrümmten Stäben . . . . .	147
5.3.6	Schnittgrößenverläufe . . . . .	152
5.4	Verformungen . . . . .	164
5.4.1	Berechnung von Verformungen . . . . .	176
5.4.2	Verzerrung aufgrund von lastfreien Einwirkungen . . . . .	183
5.4.3	Verformungen an Ecken, Gabelungen, gekrümmten Stäben und in externen Koordinatensystemen . . . . .	190
5.4.4	Biegelinie . . . . .	191

<b>6</b>	<b>Arbeit - Zusammenhang zwischen Weg- und Kraftgrößen</b>	<b>195</b>
6.1	Arbeit im Kontext der Physik . . . . .	195
6.2	Formänderungsarbeit . . . . .	198
6.3	Prinzip der virtuellen Arbeit . . . . .	203
6.3.1	Die Sätze von Betti und Maxwell . . . . .	205
6.4	Berechnung der Verformung von einzelnen Tragwerkspunkten mittels Prinzip der virtuellen Kräfte . . . . .	208
<b>7</b>	<b>Spannungstheorie</b>	<b>213</b>
7.1	Orthogonalspannungen $\sigma$ . . . . .	214
7.2	Tangetialspannungen $\tau$ . . . . .	215
7.3	Indizes der Spannungen . . . . .	216
<b>8</b>	<b>Deformationstheorie</b>	<b>217</b>
8.1	Verschiebung . . . . .	217
8.2	Dehnung $\varepsilon$ . . . . .	219
8.3	Verzerrung $\gamma$ . . . . .	220
8.4	Indizes der Deformationen . . . . .	223
<b>9</b>	<b>Lösung durch stellvertretende Körper</b>	<b>224</b>
9.1	Das stellvertretende Parallelepiped $\mathcal{E}$ . . . . .	225
9.1.1	Spannungen am Parallelepiped - statische Bedingung . . . . .	227
9.1.2	Deformationen am Parallelepiped - kinematische Bedingung . . . . .	231
9.2	Der stellvertretende Tetraeder $\mathcal{T}$ . . . . .	235
9.2.1	Spannungen am Tetraederkörper . . . . .	236
9.2.2	Deformationen am Tetraederkörper . . . . .	242
9.2.3	Trajektorien . . . . .	242
<b>10</b>	<b>Lineare Elastizitätstheorie</b>	<b>244</b>
10.1	Spannungs-Dehnungs-Beziehung . . . . .	245

10.1.1	I. Elastischer Bereich . . . . .	247
10.1.2	II. Viskoser Bereich - Fließbereich . . . . .	250
10.1.3	III. Plastischer Bereich . . . . .	251
10.1.4	IV. Erreichen der Traglast und Bruch . . . . .	252
10.1.5	Nominelle und wahre Spannung . . . . .	252
10.2	Querkontraktionszahl $\mu$ . . . . .	253
10.3	Schubmodul $G$ . . . . .	255
10.4	Verallgemeinertes Hooke'sches Gesetz . . . . .	256
10.5	Zusammenhang zwischen $E$ , $G$ und $\mu$ . . . . .	259
10.6	Kennwerte ausgewählter Materialien . . . . .	260
10.7	Geometrische Linearisierung . . . . .	261
<b>11</b>	<b>Schnittgrößentheorie</b>	<b>266</b>
11.0	Einwirkungen auf den räumlichen Körper . . . . .	268
11.0.1	Normalkraft $N$ . . . . .	268
11.0.2	Querkraft/Vertikalkraft $Q$ . . . . .	269
11.0.3	Torsionsmoment $M_T$ . . . . .	269
11.0.4	Biegemoment $M_B$ . . . . .	269
11.1	Einwirkungen auf den Stabkörper . . . . .	270
11.2	Schnittgrößen am Stabkörper . . . . .	271
11.3	Identität der Schnittgrößen . . . . .	272
<b>12</b>	<b>Spannungen am Stabkörper</b>	<b>275</b>
12.1	Normalspannungen $\sigma$ infolge Normalkraft $N$ . . . . .	276
12.2	Normalspannung $\sigma_{(\zeta)}$ infolge achsialem Biegemoment $M_y$ u. $M_z$ . . . . .	276
12.3	Schubspannungen $\tau_{(\eta,\zeta)}^{(xy)}$ und $\tau_{(\eta,\zeta)}^{(xz)}$ infolge Vertikalkraft $Q_{(\xi)}$ . . . . .	285
12.3.1	1. Näherungsansatz - $\tau_{(\eta,\zeta)}^{(zx)}$ . . . . .	292
12.3.2	2. Näherungsansatz - $\tau_{(\eta,\zeta)}^{(yx)}$ . . . . .	296
12.3.3	Schubspannungsmittelpunkt . . . . .	299

12.4	Schubspannungen $\tau_{(\eta,\zeta)}^{(xy)}$ und $\tau_{(\eta,\zeta)}^{(xz)}$ infolge Torsionsmoment $M_T$ . . .	300
12.4.1	Lösung der Spannungen . . . . .	303
12.4.2	Lösung der Verformung . . . . .	318
12.4.3	Membrangleichnis von Prandtl . . . . .	325
12.5	Nachweisführung lt. Eurocode . . . . .	329
<b>13</b>	<b>Stabilitätsprobleme</b>	<b>331</b>
13.1	Definition der Stabilität . . . . .	333
13.1.1	Stabiles Gleichgewicht . . . . .	333
13.1.2	Metastabiles Gleichgewicht . . . . .	334
13.1.3	Bereichsgebundene Stabilität . . . . .	335
13.1.4	Indifferentes Gleichgewicht . . . . .	335
13.1.5	Labiles Gleichgewicht . . . . .	336
13.1.6	Instabilität . . . . .	336
13.2	Verlust der Stabilität . . . . .	337
13.2.1	Erreichen der Traglast . . . . .	337
13.2.2	Verzweigung des Gleichgewichts . . . . .	337
13.2.3	Durchschlagen . . . . .	342
13.3	Kriterium der Stabilitätsgrenze . . . . .	342
13.4	Knicken nach Euler . . . . .	346
13.4.1	Ersatzstabverfahren . . . . .	351
13.4.2	Berücksichtigung der Imperfektionen . . . . .	353
13.5	Andere Arten relevante Stabilitätsverluste . . . . .	357
<b>14</b>	<b>Tragwerke</b>	<b>359</b>
14.1	Einfeldträger . . . . .	362
14.1.1	zweiseitig gelagerte Einfeldträger . . . . .	363
14.1.2	Kragträger bzw. Masten . . . . .	366
14.1.3	Lastumrechnung an geneigten Stäben . . . . .	369

14.2	Mehrfeldträger . . . . .	371
14.2.1	Träger auf zwei Stützen mit Kragarm . . . . .	371
14.2.2	Gerberträger . . . . .	371
14.2.3	Durchlaufträger . . . . .	372
14.3	Spezielle Konstruktionen . . . . .	377
14.3.1	Rahmen . . . . .	377
14.3.2	Kehlbalkenkonstruktion . . . . .	377
<b>15</b>	<b>ÖNORM EN 1990</b>	<b>382</b>
15.1	Allgemeines und Aufbau . . . . .	382
15.1.1	Geschichte und Entwicklung . . . . .	382
15.1.2	Status und Gültigkeit de Eurocodes . . . . .	383
15.1.3	Aufbau der Normen . . . . .	384
15.1.4	Annahmen . . . . .	387
15.1.5	Begriffe . . . . .	387
15.2	Inhalt der Norm . . . . .	390
15.2.1	Anforderungen . . . . .	390
15.2.2	Grundsätzliches zur Bemessung mit Grenzzuständen . . . . .	394
15.2.3	Basisvariablen . . . . .	397
15.2.4	Statische Berechnung . . . . .	400
15.2.5	Nachweisverfahren mit Teilsicherheitsbeiwerten . . . . .	402
15.2.6	Nachbemerkung . . . . .	411
<b>Anhang A:</b>	<b>Aufgabenstellung</b>	<b>i</b>
<b>Anhang B:</b>	<b>Projektterminplan</b>	<b>iv</b>
<b>Anhang C:</b>	<b>Besprechungsprotokolle</b>	<b>vii</b>
<b>Anhang D:</b>	<b>Stundenlisten</b>	<b>xvii</b>

<i>INHALTSVERZEICHNIS</i>	xvi
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>xxxii</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>xl</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>xliv</b>

# Vorwort

Diese Diplomarbeit wurde von der Suche nach passender Fachliteratur zur Erläuterung der Baustatik und Festigkeitslehre motiviert. Die Diplomanden stellten fest, dass die zugängliche Literatur entweder darauf abzielte, die Grundlagen in einfacher Weise darzulegen oder anspruchsvollere, komplexere Themen zu erklären, wobei ein gewisses Vorwissen bezüglich mathematischen und physikalischen Darstellungen und Konventionen vorausgesetzt wurde.

Die Diplomanden fühlten daher den Drang diese beiden Welten mit einem eigenen Buch zu überbrücken. Man wollte zeigen, wie, aufbauend auf den Grundlagen, komplexe Themen angegangen werden können. Mit der Zeit wurden die Verfasser eifriger und begannen selbst Grundlagen darzulegen bzw. komplexe Themen anzugehen. So entstand ein Buch, welches alle Themen der grundlegenden und fortgeschrittenen Statik, Tragwerks- und Festigkeitslehre attackiert.

Das Buch beginnt mit den absoluten Grundlagen, indem zuerst die Disziplinen in ihren wissenschaftlichen Kontext gesetzt werden. Danach werden ohne Vorannahmen bezüglich Wissen des Lesers Kräfte und Querschnittkennwerte definiert. In Kapitel vier werden anschließend die Grundlagen der Tragwerkslehre diskutiert. Kapitel fünf und sechs beschäftigt sich mit den wesentlichen Größen der Baustatik: Schnittgrößen, Verzerrungen, Verformungen, Auflagerreaktionen und Arbeit. Hier wurde besonders darauf Wert gelegt, dass kein Vorwissen benötigt wird, sodass jeder interessierte Leser sich in die Grundlagen einarbeiten und dann fortgeschrittene Themen angehen kann.

In Kapitel sieben bis vierzehn soll die Festigkeitslehre auf axiomatische Füße gestellt werden und von dort selbst komplexe Themen aufgebaut werden. Der Autor hat hier besonders auf mathematische Korrektheit und Abgeschlossenheit der Erläuterungen geachtet. Abgeschlossen wird das Buch mit einem den Tragwerkstypen gewidmeten Kapitel, welches zeigt, wie aus den bisher erarbeiteten Ergebnissen Tragwerke gebildet werden können. Vereinzelt sollen auch Endtabellen die Arbeit aufwerten. Im letzten Kapitel wird dann eine Einsicht in die zum Zeitpunkt der Verfassung dieser Diplomarbeit gültige ÖNORM EN 1990 gegeben, um zu zeigen, wie das theoretische Wissen dieses Buches in der Praxis zum Nachweis von Tragwerken angewendet werden kann. Das Buch betrachtet die Statik und Festigkeitslehre auf zwei verschiedenen Ebenen. Kapitel fünf und vierzehn erläutern eine makroskopische, auf das Gesamttragwerke bezogene Sicht. Kapitel sechs bis dreizehn erläutern dagegen eine mikroskopische, auf einzelne Querschnitte oder Querschnittsteile bezogene Sicht.

Selbstverständlich wurden die Diplomanden gut unterstützt. Daher bedanken wir uns bei unserem Betreuer Prof. DI. Dr. Michael Palka. Besonderer Dank gilt Prof. DI. Dr. Richard Fritze für seine ausdauernde, fachtechnische Unterstützung bei technischen Fragen, sowie bei der Erstellung des Skriptes mit  $\LaTeX$ . Außerdem ist man ao. Univ.-Prof. DI Dr. Werner Schachinger für seine Zeit bezüglich mathematischer Fragestellungen zu Danke verschuldet. Zuletzt wollen wir Frau Evelyn Leitner, Herrn und Frau Wolfgang Chiusole und Jutta Robert-Chiusole sowie Herrn und Frau Ernst Wiener und Dagmar Wiener-Wascher für ihr unermüdliches Engagement um die Korrektur literarischer Aspekte danken.

Mödling, im April 2017

G. Chiusole und M. Wiener

# Kapitel 1

## Überblick über die Statik, Festigkeits- und Tragwerkslehre

Die Statik, die Festigkeitslehre und Tragwerkslehre sind Teilgebiete der technischen Mechanik, welche ein Teilgebiet der Physik ist. Die Mechanik (altgriechisch *mechané* für „Maschine“) ist jenes Teilgebiet der Physik, welche sich mit der Bewegung von Körpern und den dabei wirkenden Kräften beschäftigt. Je nach Betrachtungsart, kann sie in folgende Teilwissenschaften unterteilt werden:

### 1.1 Unterteilung aufgrund des Körpers

#### 1.1.1 Kontinuumsmechanik

Die Kontinuumsmechanik betrachtet Körper als kontinuierlich verteilte Masse und studiert dann die Reaktion dieser Körper auf äußere Belastungen wie z.B. Kräfte. Im Konzept des Kontinuums wird der mikroskopische Aufbau der Materie (wie z.B. Atome, Moleküle) vernachlässigt und der Körper so betrachtet, als wäre er an jedem Punkt seines Volumens gleichermaßen lokalisiert. Ein Körper ist dann ein Kontinuum, wenn er in unendlich viele Teile zerteilt werden kann,

welche alle dieselben Materialeigenschaften wie die Ausgangskörper haben. Eine solche Modellierung entspricht natürlich nicht der Realität, ist jedoch im Anwendungskontext oft sinnvoll. Die formale Definition der Kontinuumsmechanik lautet:

Kontinuumsmechanik untersucht die Bewegung von deformierbaren Körpern als Reaktion auf äußere Belastungen. Der Begriff deformierbar wird hier so weit gefasst, dass Flüssigkeiten und Gase ebenfalls darunter fallen, so lange sie mit makroskopischen Größen wie Volumen oder Druck beschrieben werden.

Das Gegenteil der Kontinuumsmechanik ist die Teilchen-, Atom- oder Molekülphysik, welche makroskopische Körper aus kleineren Teilchen zusammengesetzt sieht. Die drei nun folgenden Teilgebiete können jeweils aus der Sichtweise der Kontinuums- sowie der Teilchenmechanik betrachtet werden; wir beschränken uns jedoch auf die Kontinuumsmechanik, da sie das für uns wesentliche Konzept ist.

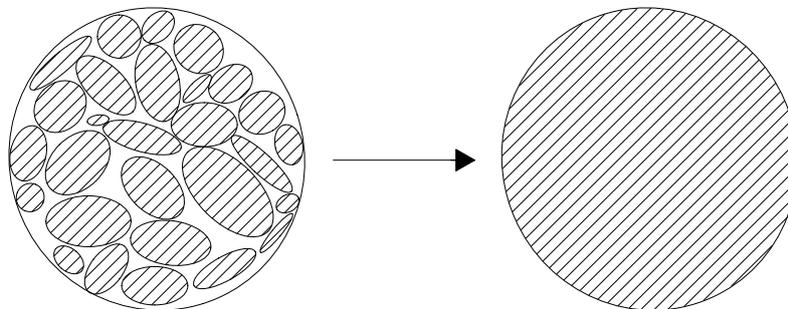


Abbildung 1.1: Betrachtung eines porösen Werkstoffes in der Teilchen- und in der Kontinuumsmechanik

### 1.1.2 Stereomechanik

Die Stereomechanik (altgriechisch *stéreo* für „hart, starr“) nimmt die betrachteten Körper als ideal starr, also unverformbar an. Wirkt eine Kraft ein, so kann sie nun nur zu einer Beschleunigung führen. Die Stereomechanik wird in Fäl-

len angewendet, bei denen Verformungen vernachlässigbar klein sind wie z.B. im Maschinenbauwesen bzw. der Dynamik. Bei der Konstruktion der Zahnräder in Abbildung 1.2 ist die Verformung zum Beispiel klein genug um vernachlässigt zu werden.

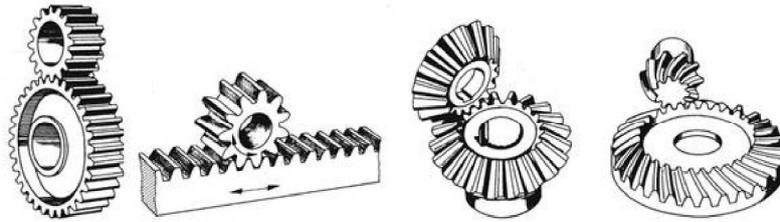


Abbildung 1.2: Zahnradsysteme

Carl Hansen Verlag: „Zahnräder“. Stand: 13.01.2017 URL: <http://decker.hanser-fachbuch.de/themen/zahnraeder.html?type=1>

### 1.1.3 Elasto- und Plastomechanik

Die Elasto- (altgriechisch *elatós* für „getrieben, dehnbar“) und Plastomechanik (altgriechisch *plastikós* für „zum Formen“) behandelt verformbare Körper im festen Aggregatzustand. In der Elastizitätstheorie werden Verformungen behandelt, welche nach Wegfallen der Einwirkung wieder verschwinden. Der betrachtete Körper gelangt nach Rücknahme der Kraft also wieder in seine Ursprungsform.

Im Gegensatz dazu behandelt die Plastizitätstheorie bleibende Verformungen, welche auch nachdem die Einwirkung wegfällt bestehen bleiben.

Die Elasto- und Plastomechanik sind zwei wesentliche Teilgebiete für die Tragwerkslehre und das Bauwesen.

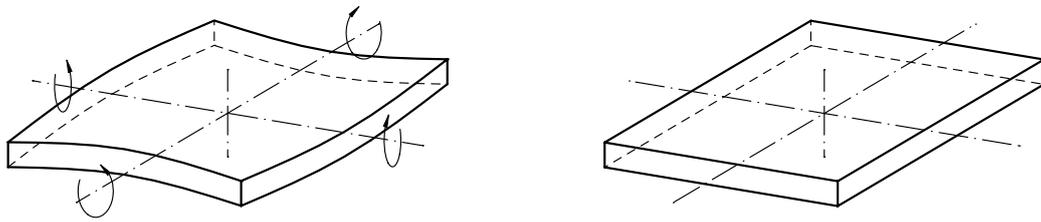


Abbildung 1.3: Verdrillte Platte - unverformte Platte

### 1.1.4 Fluidmechanik

Die Fluidmechanik (lateinisch fluidus für „fließend“) ist die Mechanik von Flüssigkeit von Gasen, also von Stoffen, welche keine fixierte Gestalt bzw. Form haben und keinen Widerstand gegen Kräfte im herkömmlichen Sinne aufweisen. Sie wird weiter unterteilt in Hydromechanik (altgriechisch hydro für „Wasser“), welche die Mechanik von Flüssigkeiten untersucht und die Aeromechanik (altgriechisch aéros für „Luft“), welche die Mechanik von Gasen behandelt.

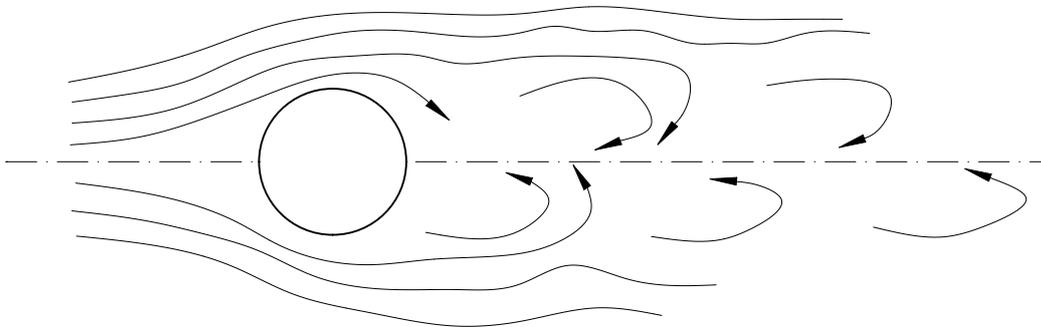


Abbildung 1.4: Turbulenz aufgrund von Luftwiderstand

## 1.2 Unterteilung aufgrund des mechanischen Vorganges

### 1.2.1 Kinematik

Die Kinematik (altgriechisch kinema für „bewegen“) beschreibt ausschließlich die Bewegung von Körpern ohne auf die Ursachen derer einzugehen. Sie behandelt den Zusammenhang zwischen Zeit, Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung und löst für geometrische Bewegungskurven. Ein Beispiel einer solchen ist die in Abbildung 1.5 dargestellte Zykloidenfunktion, welche den Weg beschreibt, den ein Punkt an einem Kreis geht, wenn sich der Kreis auf einer Linie abrollt. Da die Kinematik Verformungen nicht behandelt, ist sie eng mit der Stereomechanik verbunden.

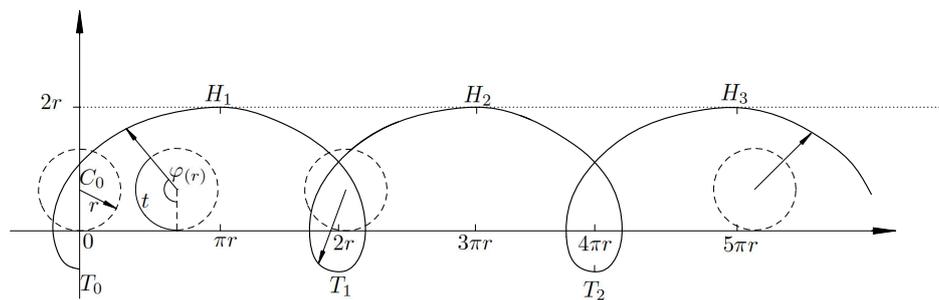


Abbildung 1.5: Zykloidenfunktion

### 1.2.2 Dynamik

Die Dynamik (altgriechisch dýnamis für „Kraft“) ist das Teilgebiet der Mechanik, welches sich mit der Wirkung von Kräften beschäftigt. Dies beinhaltet Bewegungskurven, jedoch werden diese nicht geometrisch aufgrund von Anfangsbedingungen sondern analytisch aufgrund der einwirkenden Kräfte gelöst. Allgemein formuliert behandelt die Dynamik die zeitliche Veränderung von mechanischen Systemen.

### 1.2.3 Statik

Die Statik (altgriechisch statikos für „zum Stillstand bringen“) ist ein Teilgebiet der Dynamik für den Sonderfall sich ausgleichender Kräfte. Da es bei sich ausgleichenden Kräften zu keiner Beschleunigung kommt wird die Statik auch oft die Lehre von unbewegten bzw. ruhenden Körpern bezeichnet. Sie ist besonders für die Bautechnik als Festkörper- oder Baustatik von Bedeutung.

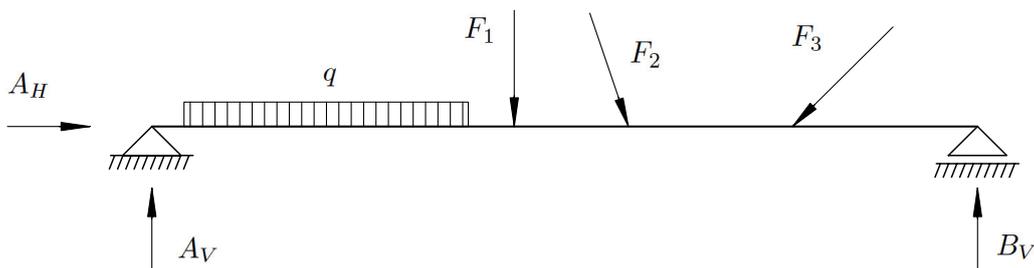


Abbildung 1.6: Träger auf zwei Stützen unter Einwirkung von Kräften

### 1.2.4 Kinetik

Die Kinetik (altgriechisch kinesis für „Bewegung“) ist das Teilgebiet der Dynamik, welches sich mit nicht ausgleichenden Kräften, also mit der Änderung von Bewegungsgrößen (z.B. Ort und Geschwindigkeit) unter Einwirkung von Kräften beschäftigt. Im Gegensatz zur Statik hängen die hier betrachteten Vorgänge von der Zeit ab, weswegen die Kinetik oft als zeitabhängige Dynamik und die Statik als zeitunabhängige Dynamik bezeichnet werden.

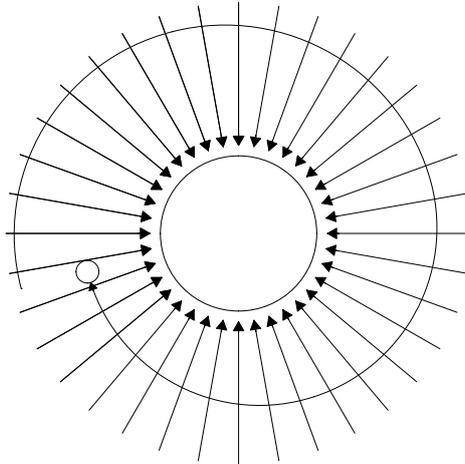


Abbildung 1.7: Fallbewegung eines Himmelskörpers mit Anfangsgeschwindigkeit in einem Gravitationsfeld

## 1.3 Unterteilung aufgrund der Methodik

### 1.3.1 Theoretische Mechanik

Die theoretische oder auch analytische Mechanik befasst sich mit der mathematischen Formulierung der Gesetze der Physik. Sie entwirft Modelle zur Beschreibung der Realität und sucht nach analytischen oder näherungsweise Lösungsverfahren zum Vorhersagen von Experimenten.

### 1.3.2 Experimentelle Mechanik

In der Experimentalphysik werden Naturvorgänge per Experiment untersucht und aufbauend darauf Modelle zur Erklärung von Folgeexperimenten entwickelt. Die experimentelle Mechanik wendet diese Methodik auf die Mechanik an.

### 1.3.3 Statistische Mechanik

Die statistische Mechanik untersucht chaotische, also nicht deterministische Systeme und stellt probabilistische Gesetze zur Beschreibung dieser auf. Diese Vorgehensweise wird vor allem bei Systemen mit vielen Freiheitsgraden, also viele Teilchen angewendet, um das System auch mit Ausdrücken der Kontinuumsmechanik beschreiben zu können. Ein Beispiel hierfür wäre die Beschreibung von der mikroskopischen Bewegung von Teilchen mithilfe der makroskopischen Größen Temperatur und Druck.

### 1.3.4 Technische Mechanik

Die technische Mechanik wendet die Gesetze der Mechanik für ingenieurmäßige Zwecke an. Das Aufgabengebiet ist die Bereitstellung von Modellen und Berechnungsverfahren für den Maschinenbau und die Baustatik, insbesondere im Hinblick auf die für diese Gebiete essenziellen Festkörpern.

Dementsprechend ist ein wesentlicher Bestandteil der technischen Mechanik die Festigkeitslehre und Festkörperphysik, welche die Eigenschaften von Körpern im festen Aggregatzustand untersuchen und diese mithilfe des Aufbaus der Materie erklären.

Aus der technischen Mechanik heraus werden viele Anwenderwissenschaften motiviert, welche nicht mehr aus den Gesetzen der Mechanik Rechenalgorithmen und Modelle für die Technik ableiten, sondern erforschen wie diese Modelle angewendet werden können, um ein bestmögliches Resultat für die Anwendung zu kreieren. Beispiel für Anwenderwissenschaften wären die Tribologie, welche sich mit der Minimierung (bzw. Maximierung) von Reibung beschäftigt, die Messtechnik, die sich mit der Entwicklung optimaler Messinstrumente und Minimierung von Messfehlern beschäftigt oder die für dieses Buch wichtige Tragwerkslehre (auch Baustatik genannt), welche versucht mithilfe den Gesetzen der Statik und

Kontinuumsmechanik ideale Tragwerke zu konstruieren.

## 1.4 Mischdisziplinen

Die Disziplinen der Festigkeits- und Tragwerkslehre sind Mischungen der oben aufgezählten Teilwissenschaften und können nicht einer dieser zugeordnet werden. Da sie den Hauptteil dieses Buches ausmachen, sollen sie daher extra herausgestellt werden:

### 1.4.1 Festigkeitslehre

Die Festigkeitslehre ist ein Teilgebiet der technischen Mechanik und der Materialwissenschaft. Sie untersucht, welche Spannungen und Verzerrungen ein Körper erfährt, wenn er durch Einwirkungen wie Kräften oder Temperaturänderungen belastet wird. Ziel dieser Disziplin ist das Beschreiben von Werkstoffverhalten, sowie das Bestimmen von Belastungsgrenzen wie z.B. Festigkeiten. Die Festigkeitslehre gehört zur Kontinuumsmechanik. Jener Teil der Materialwissenschaft, welcher Körper im Blickwinkel der Teilchenphysik betrachtet, wird Festkörperphysik genannt.

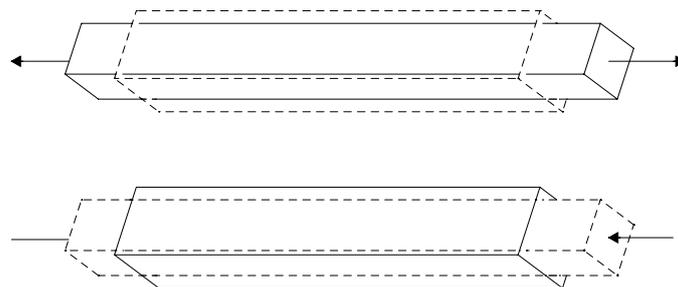


Abbildung 1.8: Verformung eines Stabes unter Zug und Druck

### 1.4.2 Tragwerkslehre

Die Tragwerkslehre ist die Lehre der Bemessung und Ausführung von Tragwerken. In der Tragwerkslehre werden Kräfte am Tragwerk bestimmt und daraus Auswirkungen für das Tragwerk errechnet. Das Ziel ist dann die Bemessung von Tragwerken auf ihre Lasten bzw. die Modellierung von Tragwerkstypen, welche eine möglichst große Belastung standhalten können. Die Baustatik als Teilgebiet der Tragwerkslehre beschäftigt sich mit ruhenden bzw. zeitunabhängigen Lasten. Die Baudynamik dagegen untersucht die Reaktion von Baukörpern auf zeitlich veränderliche bzw. mit periodischen Schlägen aufgebrachte Lasten.

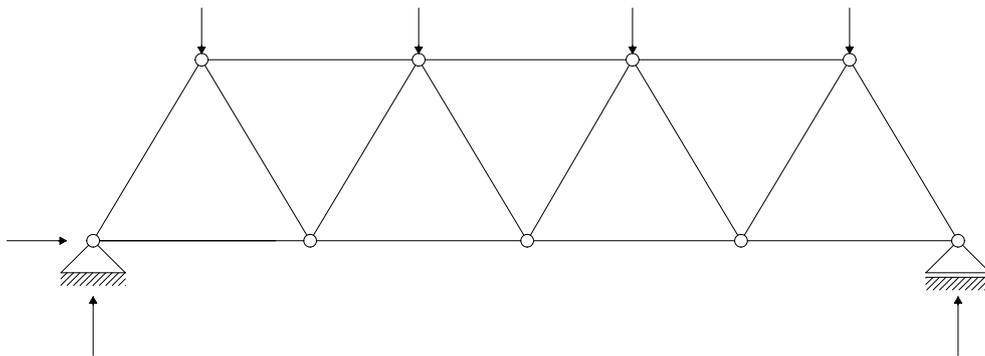


Abbildung 1.9: Bildung eines Kräftegleichgewichts an einem Fachwerk

## 1.5 Modellbildung in der Statik, Tragwerks- und Festigkeitslehre

Als Teilgebiete der Physik sind all diese Wissenschaften daran interessiert die Realität so akkurat wie möglich zu beschreiben. Andererseits wollen sie als Teilgebiet der technischen Mechanik bzw. als Anwendungswissenschaften einfach und praktisch anwendbar sein. Hierfür wird die Realität in Modellen idealisiert. Ein Modell ist eine Vereinfachung bzw. Abstraktion der Realität, basierend auf grundlegenden Annahmen welche Axiome genannt werden.

Je nachdem, wie nah die Wissenschaft der Anwendung in der Technik dienen soll, werden die Modelle vereinfacht, selbst wenn sie dadurch nicht mehr realitätskonform sind. Vor allem die Tragwerkslehre ist bereit Vereinfachungen vorzunehmen, wenn diese das Ergebnis nicht signifikant verändern, jedoch den Rechenaufwand gehörig verkürzen. Die Festigkeitslehre dagegen ist eher an der akkuraten Beschreibung der Realität interessiert.

# Kapitel 2

## Grundlegende Kräftetheorie

### 2.1 Definition der Kraft

Eine Kraft ist die Grundlage einer jeden statischen Überlegung. Sie ist ein Naturphänomen; einem mathematischen Axiom gleichzusetzen. Es können lediglich die Ursachen und Auswirkungen für eine Beschreibung herangezogen werden. Diesem Versuch folgen die von Isaac Newton im 17. Jahrhundert formulierten Grundsätze der sog. **Newton'schen Mechanik**:

Ein Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmig geradlinigen Translation, sofern er nicht durch einwirkende Kräfte zur Änderung seines Zustands gezwungen wird.

Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt.

Kräfte treten immer paarweise auf. Übt ein Körper  $A$  auf einen anderen Körper  $B$  eine Kraft aus (actio), so wirkt eine gleich große, aber entgegengerichtete Kraft von Körper  $B$  auf Körper  $A$  (reactio).

Die Kraft  $\vec{F}$  sei durch die Masse  $m$  und die Beschleunigung  $\vec{a}$  definiert zu

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad (2.1)$$

Die Einheit der Kraft lautet

$$[F] = [m] \cdot [a] = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \text{N} \quad (2.2)$$

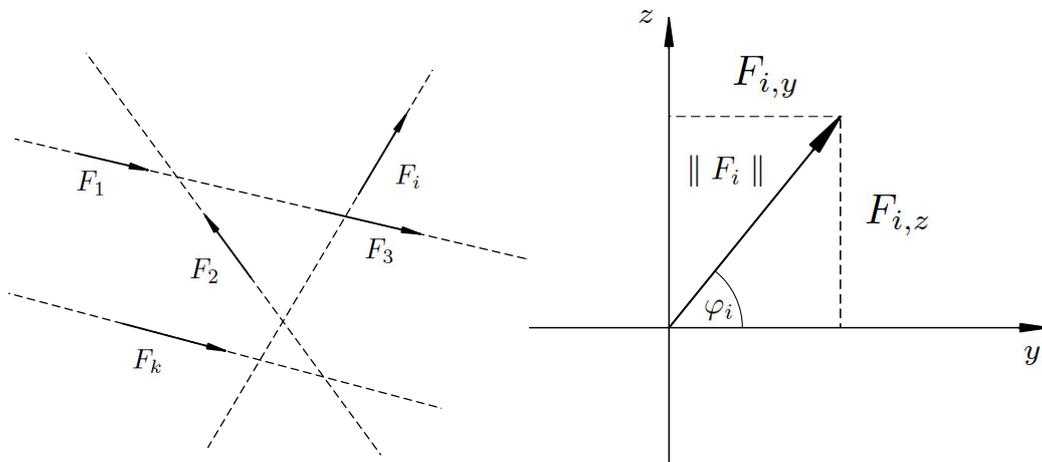


Abbildung 2.1: allgemeiner Kräfteplan    Abbildung 2.2: Umrechnung zwischen Koordinatensystemen

Kräfte sind als Vektoren zu verstehen, d. h. sie sind durch zwei Größen definiert: **Betrag und Richtung**. Dargestellt werden Kräfte und die Interaktionen derer in einem sog. **Kräfteplan**<sup>1</sup>. Vorzeichen sind maßgebend, ein Kräftemaßstab ist optional anzugeben. Die Achse, auf welcher sich der Vektor befindet, wird als **Wirklinie** bezeichnet. Die Kräfte selbst werden, wie mit Vektoren üblich, als Pfeile dargestellt, wobei dieser je nach der Wahl des Koordinatensystems angegeben wird. Man beschränkt sich hier auf eines: das sog. **orthonormierte Koordinatensystem**. Es teilt die Kraft/den Vektor in Komponenten, welche in Richtung der Achsen verlaufen. Man schreibt in Komponentenschreibweise, d. h.

<sup>1</sup>Im Kräfteplan (Abb. 2.1) sind die Kräfte  $F_1, F_2, F_3, \dots, F_i, \dots, F_k$  auf ihren Wirklinien eingetragen.

man bildet separate Gleichungen für die einzelnen Komponenten, also Anteile, welche in Richtung der jeweiligen Achsen verlaufen.

$$F^{(i)} = m \cdot a^{(i)}. \quad (2.3)$$

**Notiz** (Tensornotation). *In dieser und den folgenden formalen Gleichungen zeigt das Superskript die Komponente (die Richtung) und das Subskript den Laufindex an, welcher in dieser allgemeinen Definition noch nicht, aber bei der Untersuchung von Kraftsystemen notwendig ist. Die Schreibweise der Indizes im Superskript ist **nicht** mit kontravarianten Komponenten der Tensoren zu verwechseln. Man nutzt ein orthonormales Basissystem, in welchem Ko- und Kontravarianz zusammen fällt.*

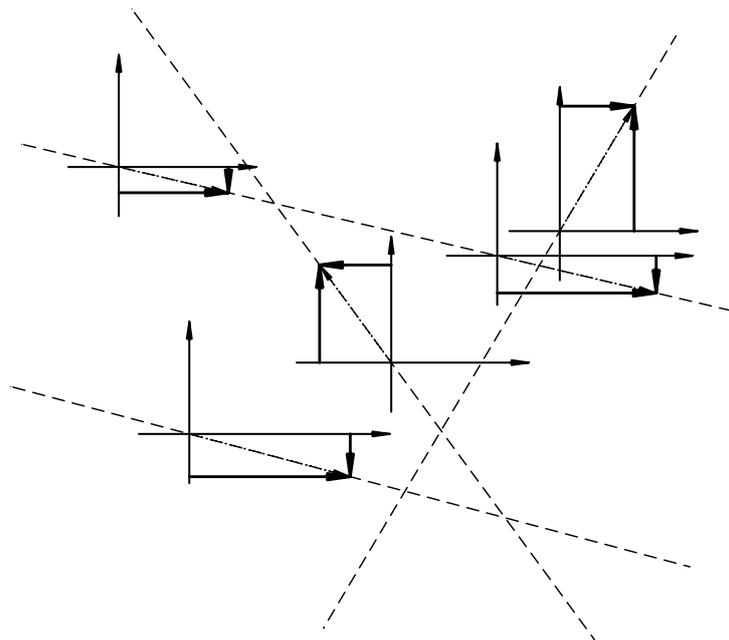


Abbildung 2.4: Kräfteplan durch Komponenten

## 2.2 Definition des Drehmoments

Kräfte sind Vektoren. Sie sind als ein Betrag auf einer geraden unendlich langen Wirklinie zu verstehen. Haben diese Wirklinien zweier (oder mehrerer) Kräfte einen gemeinsamen Schnittpunkt, so weisen auch ihre Komponenten einen gemeinsamen Schnittpunkt auf. Sie interagieren miteinander und es kann nach dem Prinzip der Superposition (vgl. 2.3.2) eine Resultierende zusammengefasst werden. Diese Resultierende ist wiederum ein Kraftvektor. Ein Ungleichgewicht dieser Kräfte erzeugt eine Translation (d. h. eine Verschiebung). Ist kein Schnittpunkt der Wirklinien vor-

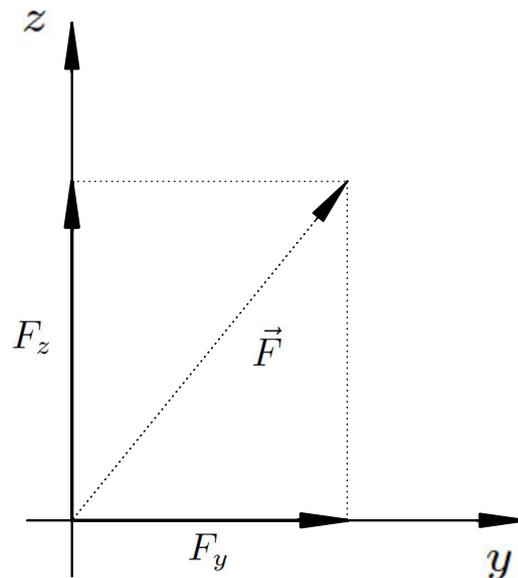


Abbildung 2.3: Darstellung durch kartesische Koordinaten

handen, so befinden sich die jeweiligen Komponenten auf zwei, durch einen fixierten Abstand voneinander getrennten Wirklinien. Die beiden Kräfte können mangels eines gemeinsamen Schnittpunktes (d. h. der Mangel einer Möglichkeit der Interaktion) zunächst nicht zusammengefasst werden (d. h. sie „wirken an einander vorbei“). „Verbindet“ man sie nun<sup>2</sup>, so erfolgt eine Interaktion. Es ist ein sog. **Kräftepaar** vorhanden und es entsteht ein sog. **Drehmoment**  $\vec{M}$  (oft auch nur kurz: Moment). Das Drehmoment kann als eine spezielle Art einer Kraft angesehen werden, welche eine gekrümmte Wirklinie hat. Ist der Abstand fixiert, so ergibt sich eine scheinbare Kreisbahn. Den Mittelpunkt dieser Kreisbahn nennt

<sup>2</sup>Unter einer solchen „Verbindung“ kann man sich einen Faden oder einen Stab vorstellen, welcher an den Kräften „angebracht“ ist

man den sog. **Drehpunkt**  $p$ . Er ist jener Punkt, durch welchen die orthogonal auf die Ebene  $\Omega$ , in welcher die Kräfte wirken, stehende sog. **Drehachse**  $\omega$  sticht.

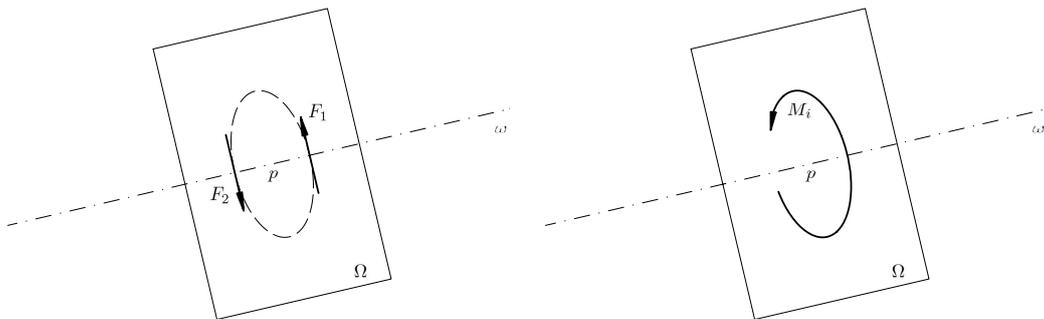


Abbildung 2.5: Kräftepaar um einen gemeinsamen Drehpunkt

Das Drehmoment  $\vec{M}$  eines Kräftepaars  $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = \vec{F}$  mit dem Abstand  $\vec{e}$  sei definiert als

$$\vec{M} = \vec{F} \times \vec{e} = \vec{F}_1 \times \frac{\vec{e}}{2} + \vec{F}_2 \times \frac{\vec{e}}{2} \quad (2.4)$$

In Komponentenschreibweise gilt mittels dem  $\varepsilon$ -Tensor aus Abschnitt XXX

$$M^{(k)} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varepsilon^{(ijk)} \cdot F^{(i)} \cdot e^{(j)} \quad (2.5)$$

**Notiz** (Einstein'sche Summenkonvention). *Beim Schreiben von Komponentengleichungen wird es oft vorkommen, dass man wie in (2.5) Summen bildet. Bei komplizierteren Gleichungen wird diese Schreibweise mittels Summenzeichen sehr unübersichtlich, weshalb man auf das Anschreiben verzichtet. Es gilt, falls in einem Term zwei gleiche Indizes vorkommen, dass man die jeweiligen Werte von 1 bis zur Dimensionszahl  $n$  addiert. Man spricht von der sog. **Einstein'schen Summenkonvention**.*

Man schreibt daher

$$M^{(k)} = \varepsilon^{(ijk)} \cdot F^{(i)} \cdot e^{(j)} \quad (2.6)$$

Die Richtung  $k$  steht hier orthogonal auf die Richtungen  $i$  und  $j$ . Wenn es notwendig ist, wird man einen Laufindex einführen müssen. Dabei wird der Laufindex im Subscript und die Komponente (Richtung) in Klammern im Superskript geschrieben, um eine Ähnlichkeit mit der im Kapitel 11 verwendeten Notation zu verdeutlichen.

Die Einheit des Drehmomentes folgt zu

$$[M] = [F] \cdot [e] = N \cdot m = Nm \quad . \quad (2.7)$$

Das Vorzeichen des Drehmomentes hängt von der Orientierung der Kräfte ab. Solange in einem System stets eine Definition für das Vorzeichen der Kräfte angewandt wird, ist sie frei zu wählen. Für eine Behandlung ohne Vektorrechnung nimmt man üblicherweise einen Drehsinn gegen den Uhrzeigersinn als positiv an. Im Verlaufe des Buches wird das Vorzeichen entweder klar definiert sein, oder eindeutig aus dem Kontext hervorgehen. Herrscht ein Ungleichgewicht der Momente, so erfolgt eine Rotation (i. e. eine Verdrehung).

**Notiz** (Drehmomente in der Realität). *Spricht man in der Realität von **einem Drehmoment**, so spricht man dabei implizit immer von dem Kräftepaar, welches dieses ausmacht. Auch in diesem Buch wird man sagen, dass beispielsweise bei einem eingespannten Auflager (siehe Abschnitt 4.2.2) nur ein Moment auftritt. Woher das Moment schlussendlich aber eigentlich herrührt wird verschwiegen, da sich die Kräfte ja auch ausgleichen (vgl. Kräftepaar) und nur ein Drehmoment über bleibt.*

## 2.3 Das Kraftsystem

Ein Kraftsystem ist eine Anordnung (bzw. eine Gruppe) von Kräften, welche miteinander interagieren. Man kann ein räumliches, ein ebenes und ein einachsiges Kraftsystem unterscheiden. Die Ansätze der Ebene lassen sich ohne viel Weite-

res auf einen Raum übertragen und das einachsige Kraftsystem würde nach der Behandlung der ebenen Fälle äußerst trivial wirken. Man wird daher stets ebene Kraftsysteme untersuchen.

Statt der Dimensionszahl wird hier nach einer wesentlich wichtigeren Charakteristik unterschieden: dem jeweiligen Auftreten von Kräfte und Momenten.

	$\sum_{\alpha} F_{\alpha}^{(i)} = 0$	$\sum_{\alpha} F_{\alpha}^{(i)} \neq 0$
$\sum_{\alpha} M_{\alpha}^{(k)} = 0$	Gleichgewicht	Momentenfrei
$\sum_{\alpha} M_{\alpha}^{(k)} \neq 0$	Kraftfrei	Allgemein

Tabelle 2.1: Einteilung von Kraftsystemen

Man ist stets darum bemüht eine sog. **resultierende** Kraftgröße zu bilden. Sie ist eine Kraft oder ein Moment, welches die Kräfte im System in äquivalenter Weise repräsentiert und bildet daher die Summe der vorkommenden Kräfte. Wie man die Summen in den einzelnen Fällen tatsächlich bildet, wird in den folgenden Abschnitten behandelt.

### 2.3.1 I. Kraftsystem im Gleichgewicht

Ein Kraftsystem, welches sich im Gleichgewicht befindet, ist dadurch definiert, dass es kräftefrei und momentenfrei ist. Die Summe aller vorkommenden Kraftkomponenten sowie Drehmomente ist 0. Es gilt also

$$\sum F_{\alpha}^{(i)} = 0 \quad \text{und} \quad \sum M_{\alpha}^{(k)} = 0 \quad . \quad (2.8)$$

Kräftefreiheit kann gegeben sein, wenn jede einzelne Kraftkomponente 0 ist, also

$$F_{\alpha}^{(i)} = 0 \quad (2.9)$$

oder wenn die Summe aller Kraftkomponenten 0 ist, sich die Kräfte also gegen-

seitig ausgleichen, also

$$\sum_{\alpha} F_{\alpha}^{(i)} = 0 \quad . \quad (2.10)$$

Ersterer ist ein trivialer Fall, da dieses Kraftsystem gar keine Kräfte beinhalten würde. Letzterer lässt sich durch einfache Vektoraddition lösen. Die resultierenden Komponenten in Richtung  $i$  des Vektors  $\vec{F}$  sind

$$\boxed{F^{(i)} = \sum_{\alpha} F_{\alpha}^{(i)} = 0} \quad , \quad (2.11)$$

<sup>3</sup> wobei  $F_{\alpha}^{(i)}$  die Komponenten der Kraft  $\alpha$  im System sind.

Momentenfreiheit kann gegeben sein, wenn jede einzelne Momentenkomponenten 0 ist, also

$$M_{\alpha}^{(k)} = 0 \quad (2.12)$$

oder wenn die Summe aller Momentenkomponenten 0 ist, sich die Momente also gegenseitig ausgleichen, also

$$\sum_{\alpha} M_{\alpha}^{(k)} = 0 \quad . \quad (2.13)$$

Der Erste ist wieder trivial, sofern gilt, dass auch Kräftefreiheit besteht. Wie das Kraftsystem zu beschreiben ist, wenn keine Kräftefreiheit gefordert ist, wird im nächsten Abschnitt gezeigt. Letzterer lässt sich durch einfache Addition der Komponenten der Momente lösen. Die resultierenden Komponenten in Richtung  $k$  des Vektors  $\vec{M}$  sind

---

<sup>3</sup>Man erinnere sich, dass man auch vorausgesetzt hat, dass das System momentenfrei ist. Ein solches, für das die Momentenfreiheit nicht gilt, wird in einem der folgenden Abschnitte behandelt.

$$\boxed{M^{(k)} = \sum_{\alpha} M_{\alpha}^{(k)} = 0} \quad , \quad (2.14)$$

wobei  $M_{\alpha}^{(k)}$  die Komponenten der Momente  $\alpha$  im System sind.

Es treten also weder Translationen noch Rotationen auf.

Der Fall von Kräftefreiheit und Momentenfreiheit ist die Verbindung des hier als II. und III. angeführten Falles. Man nutzt daher diese Formeln.

### 2.3.2 II. Momentenfreies Kraftsystem

Ein momentenfreies System liegt dann vor, wenn die Summe aller Momente 0 ist, also

$$\sum_{\alpha} M_{\alpha}^{(k)} = 0 \quad . \quad (2.15)$$

Momentenfreiheit kann gegeben sein, wenn jede einzelne Momentenkomponente 0 ist, also

$$M_{\alpha}^{(k)} = 0 \quad (2.16)$$

oder wenn die Summe aller Momentenkomponenten 0 ist, sich die Momente also gegenseitig ausgleichen, also

$$\sum_{\alpha} M_{\alpha}^{(k)} = 0 \quad . \quad (2.17)$$

Ersterer Fall kann lt. (2.6) vorkommen, wenn entweder gilt

$$F_{\alpha}^{(i)} = 0 \quad \text{oder} \quad e_{\alpha}^{(j)} = 0 \quad , \quad (2.18)$$

Ersterer ist trivial, da ein System vorliegen würde, welches keine Kräfte enthält.

Letzteres hingegen sagt aus, dass zwischen den Komponenten der Kräfte keine Normalabstände auftreten. Das liegt vor, wenn sich die Wirklinien aller Kräfte des Systems in jenem Punkt (in welchem sie einwirken) schneiden. Man nennt solch eine Konfiguration ein sog. **zentrales Kraftsystem** (siehe Abb. 2.6).

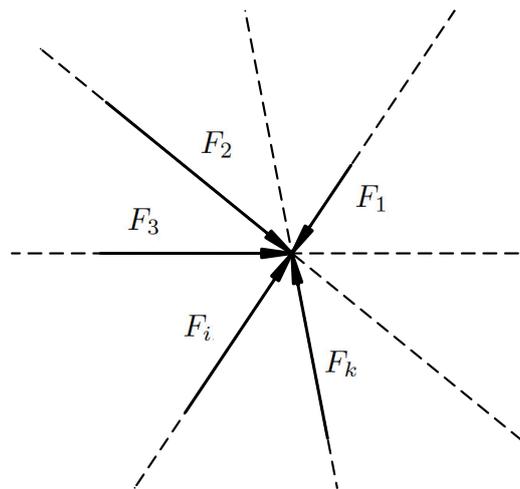


Abbildung 2.6: zentrales Kraftsystem

Die Resultierende in einem solchen System kann durch einfache Vektoraddition bestimmt werden. Es folgt

$$\boxed{F^{(i)} = \sum_{\alpha} F_{\alpha}^{(i)}} \quad , \quad (2.19)$$

Es ist die gleiche Formel wie (2.11), außer dass eben nicht mehr gefordert ist, dass die resultierende Kraft 0 ist.

Letzterer Fall beschreibt ein Kraftsystem, dessen Kraftkomponenten nicht 0 und von einander durch Normalabstände getrennt sind. Sie erzeugen also Drehmomente, welche sich aber ausgleichen.

Hier ist es nicht nur notwendig, wie im vorherigen Abschnitt, den Betrag bzw. die Richtung, sondern auch die Lage der resultierenden Kraft zu bestimmen. Man macht sich das Hebelgesetz zunutze.

### Hebelgesetz

Das Hebelgesetz ist ein empirisches, also aus der Anschauung heraus entstandenes Gesetz.

Man betrachte eine Waage, eine Wippe, oder einen Bleistift, welcher mittig auf einer Erhöhung liegt. Man belaste die Wippe nun mit mehreren Kräften  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_\beta$ . Das Hebelgesetz sagt aus, dass das resultierende Moment um den Punkt  $p$ , auf dem die Wippe aufliegt

$$M^{(k)} = \sum_{\alpha} \varepsilon^{(ijk)} \cdot F_{\alpha}^{(i)} \cdot e_{\alpha}^{(j)} \quad (2.20)$$

ist und dass man den Punkt überall ansetzen kann. Kennt man das Moment um den Punkt, so kann man eine Kraft  $F^{(i)}$  finden, welche multipliziert mit einem Abstand  $e^{(j)}$  das selbe Moment erzeugt.

Es gilt also

$$F^{(i)} \cdot e^{(j)} = \sum_{\alpha} F_{\alpha}^{(i)} \cdot e_{\alpha}^{(j)} \quad (2.21)$$

**Notiz** (Kräftepaare). *Auch hier liegen Kräftepaare vor, welche die Momente erzeugen. Sie sind durch die einzelnen Kräfte  $\vec{F}_{\alpha}$  und den Auflagerpunkt gebildet. Der Punkt, in welchem die Wippe aufliegt, wird durch eine genau so große Gegenkraft (Auflagerkraft)  $F_{aufl} = \sum_{\alpha} F_{\alpha}$  an seinem Ort gehalten.*

Mit diesem Wissen lässt sich nun auch die Position der Resultierenden bilden. Es ist jene, durch den Abstand  $e^{(j)}$  definierte Position, für welche mittels (2.24) gilt

$$F^{(i)} = \sum_{\alpha} F_{\alpha}^{(i)} \quad , \quad (2.22)$$

dann ist nach (2.24) dieser Kraft genau ein Abstand zugeordnet.

Zusammengefasst gilt für den Wert der resultierenden Kraftkomponenten

$$\boxed{F^{(i)} = \sum_{\alpha} F_{\alpha}^{(i)}} \quad (2.23)$$

und für die Komponenten der Position dieser

$$\boxed{e^{(j)} = \frac{1}{F^{(i)}} \sum_{\alpha} F_{\alpha}^{(i)} \cdot e_{\alpha}^{(j)}} \quad (2.24)$$

### 2.3.3 III. Kraftfreies Kraftsystem

Ein kräftefreies System liegt dann vor, wenn die Summe aller Kräfte 0 ist, also

$$\sum_{\alpha} F_{\alpha}^{(i)} = 0 \quad (2.25)$$

Kräftefreiheit kann gegeben sein, wenn jede einzelne Kraftkomponente 0 ist, also

$$F^{(i)} = 0 \quad (2.26)$$

oder wenn die Summe aller Kraftkomponenten 0 ist, sich die Kräfte also gegenseitig ausgleichen, also

$$\sum_{\alpha} F_{\alpha}^{(i)} = 0 \quad (2.27)$$

Ersterer ist ein trivialer Fall, da dieses Kraftsystem gar keine Kräfte und daher auch keine Momente beinhalten würde. Für letzteren gilt daher das Hebelgesetz. Für das resultierende Moment gilt lt. (2.20)

$$\boxed{M^{(k)} = \sum_{\alpha} M_{\alpha}^{(k)} = \sum_{\alpha} \varepsilon^{(ijk)} \cdot F_{\alpha}^{(i)} \cdot e_{\alpha}^{(j)}} \quad (2.28)$$

Aus dem Hebelgesetz geht außerdem hervor, dass das Moment für jeden Punkt  $p$  gleich ist. Diese Aussage wird im Folgenden noch einmal genauer erklärt.

### Der rechnerische Drehpunkt

Hier soll gezeigt werden, dass, falls Momentengleichheit besteht,

$$M_{(p_1)} = M_{(p_2)} \quad (2.29)$$

gilt. Dass also das Moment um einen beliebigen Drehpunkt gebildet werden kann.

Man wähle den sog. **natürlichen**

**Drehpunkt**  $p_n$  zufolge der Kräfte  $F_{n,1}$  und  $F_{n,2}$  welcher in der Mitte zwischen den beiden liegt<sup>4</sup>. Sie erzeugen das Moment  $M_n$ . Man möchte nun beweisen, dass ein Moment  $M_{equ}$ , erzeugt durch die Kräfte  $F_{equ,1}$  und  $F_{equ,2}$ , welche um einen beliebig gewählten anderen Punkt  $p_r$  drehen, das selbe Ergebnis liefert wie  $M_n$ .

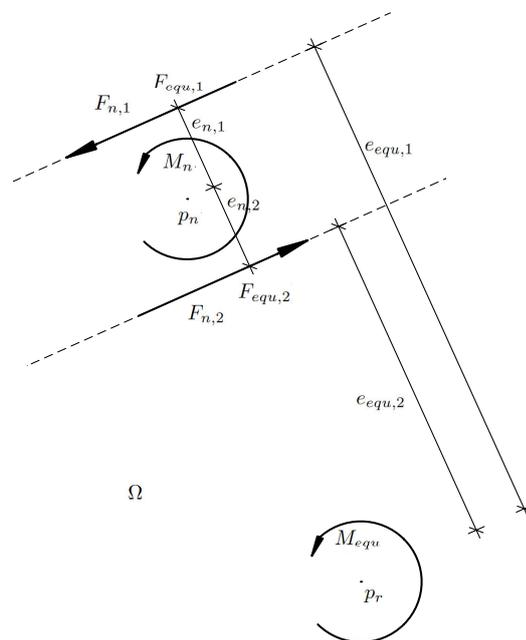


Abbildung 2.7: Satz vom rechnerischen Drehpunkt

**Notiz** (natürlicher Drehpunkt). Als natürlicher Drehpunkt wird jener bezeichnet, durch welchen die aus den Teilkräften resultierende Kraft geht (siehe Abschnitt 2.3.3). Für den Spezialfall eines Kräftepaars kann jeder Punkt als ein natürlicher Drehpunkt angenommen werden, da per Definition Kräftefreiheit besteht. Aufgrund der Gleichgewichtsbedingungen der Kräfte bildet sich genau ein bestimmter natürlicher Drehpunkt. Ein rechnerischer Schwerpunkt hingegen kann, wie gleich gezeigt,

<sup>4</sup>Der Index  $_n$  steht für „natürlich“. Der Index  $_{equ}$  steht für „äquivalent“.

beliebig gewählt werden.

Man wählt:

$$F_{n,1} = F_{equ,1} \quad , \quad (2.30)$$

$$F_{n,2} = F_{equ,2} \quad , \quad (2.31)$$

sowie

$$F_{n,1} = F_{n,2} \quad , \quad (2.32)$$

und daher

$$F_{equ,1} = F_{equ,2} \quad , \quad (2.33)$$

und aus Abb. 2.7

$$e_{n,1} + e_{n,2} = e_{equ,1} - e_{equ,2} \quad . \quad (2.34)$$

Es lassen sich die beiden folgenden Gleichungen aufstellen:

$$M_n = F_{n,1} \cdot e_{n,1} + F_{n,2} \cdot e_{n,2} \quad (2.35)$$

$$M_{equ} = F_{equ,1} \cdot e_{equ,1} - F_{equ,2} \cdot e_{equ,2} \quad . \quad (2.36)$$

Um zu zeigen, dass die Momente  $M_n$  und  $M_{equ}$  tatsächlich äquivalent sind, muss die Bedingung  $M_n = M_{equ}$  gelten (also eine wahre Aussage ergeben).

$$M_n = M_{equ} \quad (2.37)$$

$$F_{n,1} \cdot e_{n,1} + F_{n,2} \cdot e_{n,2} = F_{equ,1} \cdot e_{equ,1} - F_{equ,2} \cdot e_{equ,2} \quad (2.38)$$

Mittels der gewählten Bedingung (2.34) gilt:

$$F_{n,1} = F_{equ,1} \quad (2.39)$$

$$F_{n,2} = F_{equ,2} \quad (2.40)$$

Sofern

$$F_{n,1} = F_{n,2} \quad (2.41)$$

$$F_{equ,1} = F_{equ,2} \quad (2.42)$$

Das heißt, gilt (2.34), dann gelten auch (2.30) und (2.31).

Der natürliche Drehpunkt lässt sich also tatsächlich durch einen beliebig gewählten, rechnerischen Drehpunkt ersetzen. Das heißt auch, dass das Drehmoment eines Kräftepaars um einen jeden Bezugspunkt das selbe ist.

(2.41) und (2.42) sagen aus, dass Kräftegleichgewicht eine Ausgangsbedingung für diesen Satz ist. Herrscht also Kräftegleichgewicht (oder sagt man es treten nur Momente auf), so gilt für zwei Momente<sup>5</sup>, welche um zwei verschiedene Punkte  $p_1$  bzw.  $p_2$  drehen

$$M_{(p_1)} = M_{(p_2)} \quad (2.43)$$

bei  $p_1 \neq p_2$ . Es lässt sich also für ein gesamtes System ein resultierendes Dreh-

---

<sup>5</sup>welche durch die gleichen Kräfte entstehen

moment bestimmen. Bei einem allgemeinen Kraftsystem wird sich zeigen, dass das nicht möglich ist.

(2.35) lässt sich als Summe von Kräften, welche um einen Punkt rotieren, interpretieren. Während diese Summe für ein Kräftepaar auf 2 Summanden beschränkt ist, liegt nahe, dass sich beliebig viele Kräfte zu einem Moment zusammenfassen lassen. Die Gleichung (2.35) wird zu

$$M_{res} = \sum M_i \quad , \quad (2.44)$$

was ja auch schon durch das Hebelgesetz gezeigt wurde. In Komponentenschreibweise gilt

$$M^{(k)} = \sum_{\alpha} M_{\alpha}^{(k)} = \sum_{\alpha} \varepsilon^{(ijk)} F_{\alpha}^{(i)} \cdot e_{\alpha}^{(j)} \quad . \quad (2.45)$$

### 2.3.4 IV. Allgemeines Kraftsystem

Ein allgemeines Kraftsystem liegt dann vor, wenn man sich weder auf die Annahme, dass die Summe der Kräfte noch die Summe der Momente 0 ergibt verlässt. Zur Lösung solcher Systeme betrachtet man zunächst Abschnitt 2.3.3. In einem kraftfreien System lieferte also jeder Drehpunkt, welchen man wählen konnte, das gleiche Ergebnis, sofern Kräftegleichgewicht vorliegt (siehe (2.41) und (2.42)). Liegt nun aber kein Kräftegleichgewicht vor, so liegt nahe, dass auch nicht mehr jeder Drehpunkt gleichermaßen äquivalent ist. Man betrachte die Abbildung 2.8, welche die gleiche Anordnung der Kräfte beschreibt, aber hier ohne der Bedingung der Kräftefreiheit.

$$F_{n,1} = F_{n,2} \quad (2.46)$$

und

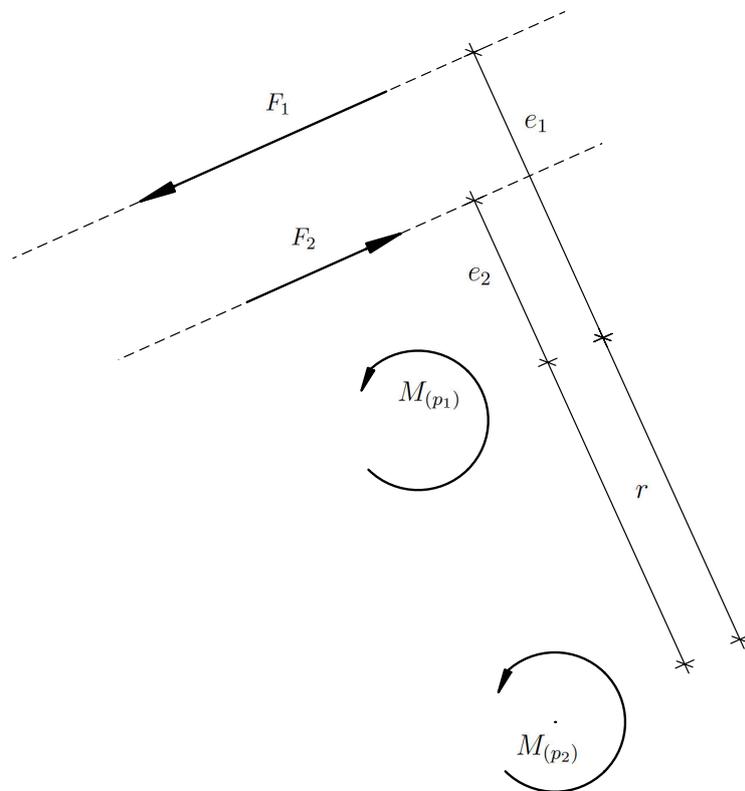


Abbildung 2.8: Satz vom rechnerischen Drehpunkt im allgemeinen Kraftsystem

$$F_{equ,1} = F_{equ,2} \quad . \quad (2.47)$$

Es wird sich wohl herausstellen, dass auch die Folgerung

$$M_{(p_1)} = M_{(p_2)} \quad (2.48)$$

nicht gilt.

Lt. Abb. 2.8 gilt für das Moment um den Punkt  $p_1$

$$F_1 \cdot e_1 - F_2 \cdot e_2 = M_{(p_1)} \quad (2.49)$$

und folglich um den Punkt  $p_2$

$$F_1 \cdot (e_1 + r) - F_2 \cdot (e_2 + r) = M_{(p_2)} \quad , \quad (2.50)$$

wobei  $r$  die Verschiebung des Drehpunktes normal zur Wirklinie der Kräfte ist.

Nach Umstellung folgt

$$\underbrace{F_1 \cdot e_1 - F_2 \cdot e_2}_{=M_{(p_1)}} + r(F_1 - F_2) = M_{(p_2)} \quad . \quad (2.51)$$

Die ersten beiden Terme entsprechen dabei dem Moment um den Ausgangspunkt  $p_1$  der Verschiebung und der letzte der Resultierenden der beiden Kräfte um den Ausgangspunkt  $p_1$ . Daher folgt für allgemeine Kraftsysteme

$$\boxed{M_{(p_2)}^{(k)} = \sum_{\alpha} M_{\alpha, (p_1)}^{(k)} + \varepsilon^{(ijk)} \cdot \sum_{\alpha} F_{\alpha}^{(i)} \cdot r^{(j)}} \quad (2.52)$$

mit

$$r^{(j)} = p_1^{(j)} - p_2^{(j)} \quad . \quad (2.53)$$

In einem allgemeinen Kraftsystem ist der Wert des Momentes abhängig von der Wahl des Drehpunktes, außer  $\sum_{\alpha} F_{\alpha}^{(i)} = 0$ , was ein kraftfreies System darstellt (siehe 2.3.3) oder  $r^{(j)} = 0$ , was  $p_2 = p_1$  entsprechen würde und daher gar keine Verschiebung ist.

Die Kräfte selbst lassen sich ohne Weiteres wie gehabt zusammenfassen:

$$\boxed{\sum_{\alpha} F_{\alpha}^{(i)} = F^{(i)}} . \quad (2.54)$$

# Kapitel 3

## Querschnitte

Der Grund für diese intensive, direkte Behandlung eines Querschnittes ist unter anderem, dass in der Statik sowie allgemeinen Mechanik, oft (um nicht zu sagen ständig) Stabkörper<sup>1</sup> behandelt werden. Da eine der 3 Achsen/Abmessungen den anderen beiden deutlich an Länge überlegen ist, sind viele Überlegungen, welche die Festigkeitslehre betreffen, auf eine Fläche (den Querschnitt) zurückzuführen. Natürlich lässt sich ein Querschnitt auch für einen jeden anderen Körper bilden. Ein Querschnitt ist, wie der Name unschwer zu erkennen gibt, ein Schnitt, welcher quer, also normal, zu einer der 3 Achsen verläuft. normal auf jede Achse. Auch bei einem Stabkörper sind daher drei mögliche Querschnitte zu betrachten. Wie erwähnt werden wir uns jedoch meist auf jenen Schnitt beschränken welcher normal auf die  $x$ -Achse<sup>2</sup> steht. Die Schnittebene heiße  $\Omega$ , die entstehende Querschnittsfigur  $\bar{\Omega}$  mit dem Flächeninhalt  $A$ .

Jedem Querschnitt lassen sich sog. **Querschnittskennwerte** zuordnen, welche nur von diesem abhängig sind. Diese Kennwerte, welche wir zunächst behandeln werden sind als sog. **Flächenmomente** zu bezeichnen.

Der Grad der Flächenmomente bezeichnet die Potenz des Normalabstandes.

---

<sup>1</sup>Der Begriff Stab, so intuitiv und vertraut er klingen mag, wird im Kapitel der Ausbildung von Tragwerken formal definiert werden (siehe Abschnitt 4.2)

<sup>2</sup>oder ganz allgemein normal auf die längere Achse

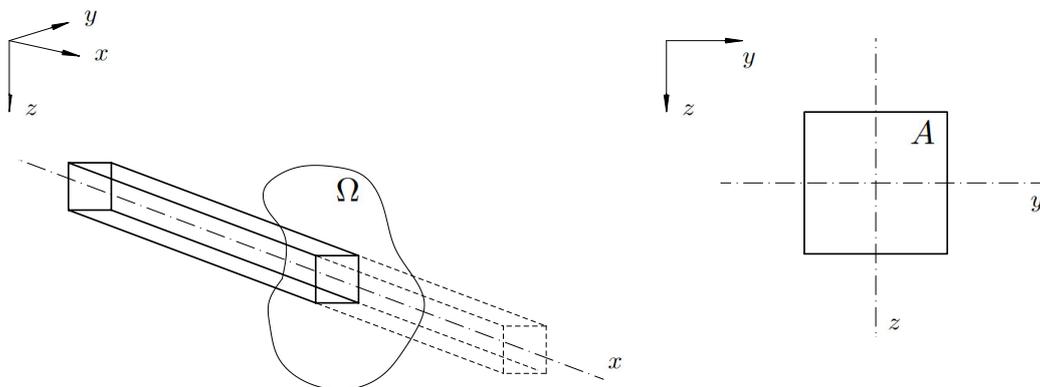


Abbildung 3.1: Stab mit Schnittführung und Querschnitt

### 3.1 Flächenmoment 0. Ordnung - Fläche $A$

Allgemein wird Fläche durch das Ausmaß einer durch zwei Dimensionen erzeugten Figur definiert. Die Berechnung dieser kann allgemein durch die Multiplikation dieser zwei Dimensionen beschrieben werden. Zunächst ist diese Flächenberechnung nur für einfache geometrische Figuren möglich (z.B. ein Quadrat, Dreieck, regelmäßiges Polygon,...), da diese aus geraden Linien zusammengesetzt werden, welche den Raum ausmachen, in welchem sie existieren.

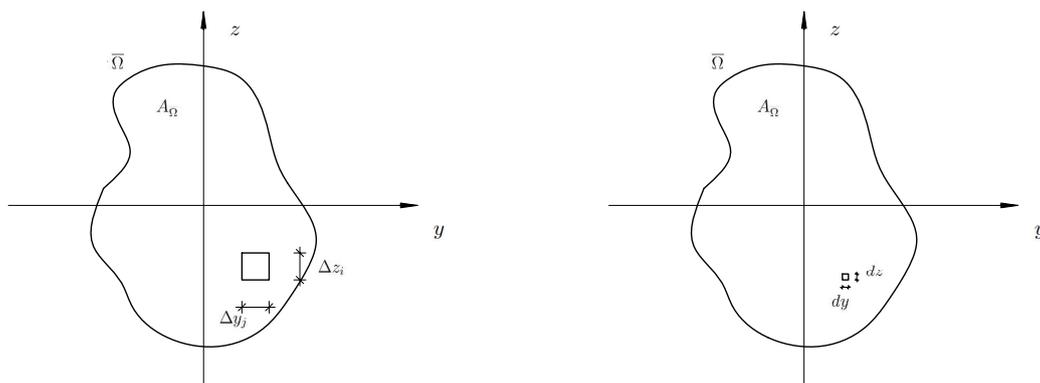


Abbildung 3.2: Flächenmoment 0. Ordnung

Anders geformte Figuren können durch geschickte Unterteilung in Teilflächen (z.B. regelmäßige Polygone, Hexagon), Analyse als Teilfläche (z.B.: rechtwinke-

liges Dreieck) oder Approximation (z.B. Kreis) gelöst werden. Doch auch diese Methoden stoßen bei steigender Komplexität der Figuren an ihre Grenzen. Eine Lösung wäre es, die allgemeine Figur in viele kleine, regelmäßige Teilflächen zu zerteilen und danach zu summieren. Es ist dieser Ansatz, welcher zur Formulierung der Differentialrechnung, speziell des inversen Verfahrens d. h. dem Integral führte. Somit ergibt sich die Fläche  $A$  einer beliebigen, allgemeinen Figur  $\bar{\Omega}$  durch Summation der Teilflächen zu (siehe Abb. 3.2 links)

$$A_{\bar{\Omega}} = \sum_g \Delta A_g = \sum_j \sum_i \Delta z_i \cdot \Delta y_j. \quad (3.1)$$

Wobei  $\Delta z$  eine Teilabmessung in Richtung der  $z$ -Achse und  $\Delta y$  eine Teilabmessung in Richtung der  $y$ -Achse bezeichnet, sodass  $\Delta A = \Delta y \cdot \Delta z$ . Die Enden der Laufindizes bezeichnen dabei die Anzahl der vorkommenden Teilabmessungen. Mittels der Anwendung der Limes-Funktion als Grundlage des Differentials ergibt sich die Formel zu (siehe Abb. 3.2 rechts)

$$A_{\bar{\Omega}} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \sum_g \Delta A_g = \lim_{\Delta y_j \rightarrow 0} \sum_j \lim_{\Delta z_i \rightarrow 0} \sum_i \Delta z_i \cdot \Delta y_j = \int_y \int_z dz \cdot dy. \quad (3.2)$$

$$\boxed{A_{\bar{\Omega}} = \int_A dA = \int_y \int_z dz \cdot dy} \quad (3.3)$$

Analog folgt das Volumen  $V_{\mathcal{A}}$  des Körpers  $\mathcal{A}$  zu

$$V_{\mathcal{A}} = \int_V dV = \int_x \int_y \int_z dz \cdot dy \cdot dx \quad (3.4)$$

Im folgenden wird die Idee einer Fläche, welche sich in einem neuen Koordinatensystem  $(\eta\xi)$  befindet, welches sich vom Ursprünglichen durch eine Rotation bzw. Translation unterscheidet angeführt. Da die Fläche aufgrund des Fehlens einer achsenabhängigen Variable invariant gegenüber solchen Transformationen

des Koordinatensystems ist, verändert sich ihr Wert nicht. Es soll als eine rein formale Komplettierung angesehen werden, da Koordinatentransformationen für Flächenmomente höherer Ordnung sehr wohl Veränderungen bewirken.

### Flächen um parallel verschobene Achsen

Flächen sind von den Achsen unabhängig. Daher:

$$A_y = A_z = A_\eta = A_\xi \quad (3.5)$$

### Flächen um verdrehte Achsen

Flächen sind von den Achsen unabhängig. Daher:

$$A_y = A_z = A_\eta = A_\xi \quad (3.6)$$

## 3.2 Flächenmoment 1. Ordnung - statisches Moment $S$

Ein Körper kann wie zuvor erläutert in beliebig viele Teilkörper unterteilt werden. Jeder dieser Teilkörper weist eine bestimmte Masse und im Gravitationsfeld der Erde auch eine gewisse Gravitationskraft auf. Nun ist es das Ziel die Resultierende aus diesen Teilkräften zu bilden um den Körper als ganzen repräsentieren zu können. Es wird angenommen, die Masse sei auf den Körper gleichmäßig verteilt und die Wirklinien des Gravitationsfeldes der Erde verlaufen parallel. Beide Annahmen geben die Wirklichkeit genau genug wieder. Das Problem wird als ein momentenfreies Kräftesystem angenommen<sup>3</sup> und durch das Momentengleichge-

<sup>3</sup>Ein solches, in welchem sich die Momente ausgleichen. Später wird sich zeigen, dass diese Annahme richtig ist.

wicht gelöst. Anschließend wird der Abstand der Resultierenden bestimmt. Es ergeben sich die Formeln zu

$$M_{res} = \sum_{i=1}^n M_i = \sum_{i=1}^n F_i \cdot e_i = F_{res} \cdot e_{res} \quad (3.7)$$

zur Ermittlung des resultierenden Moments und

$$e_{res} = \frac{M_{res}}{F_{res}} \quad (3.8)$$

zur Ermittlung des Abstandes zu einem frei gewählten Fixpunkt.

$$M_y = F_y \cdot z_s = \sum_{i=1}^n \Delta F_i \cdot z_i = \sum_{i=1}^n \Delta G_i \cdot z_i = \sum_{i=1}^n \gamma \cdot t \cdot \Delta A_i \cdot z_i, \quad (3.9)$$

wobei  $G$  die Gravitationskraft,  $\gamma$  die Wichte des Materials und  $t$  die Dicke des Querschnittes darstellt. In dieser und den folgenden Gleichungen wird der Abstand durch ein kleines  $z$  bezeichnet. Durch Elimination der Wichte sowie der Dicke ergibt sich das sog. **axiale Flächenmoment 1. Ordnung**  $S_y$  um die  $y$ -Achse zu

$$S_y = \lim_{\Delta A_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n z_i \cdot \Delta A_i = \int_A z_i \cdot dA. \quad (3.10)$$

Die Koordinate des Schwerpunktes in Richtung der  $z$ -Achse ergibt sich zu

$$z_s = \frac{S_y}{\int^A dA} = \frac{S_y}{A}. \quad (3.11)$$

Die Einheit des statischen Momentes ergibt sich aus der Fläche  $A$  und dem Abstand  $z_s$  bzw.  $y_s$  zu  $m^3$ . Man sagt „das statische Moment um die  $y$ -Achse“ als Analogie zur Drehung des Moments um diese Achse. Gleichfalls sind die Abstände  $z_i$  als diese zwischen den Schwerpunkten der Teilflächen und der frei

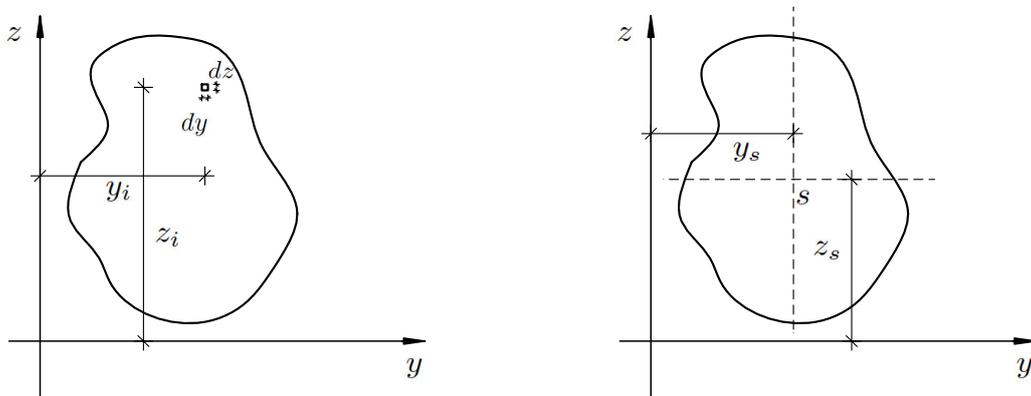


Abbildung 3.3: statisches Moment und Schwerpunktkoordinaten

zu wählenden Achse, und der Abstand  $z_s$  als der Abstand des Schwerpunktes  $s$  der Gesamtfläche von der frei gewählten Achse zu sehen. Die Koordinate in Richtung der  $y$ -Achse ist analog zu ermitteln. Das statische Moment ergibt sich je nach der Position der Fläche zur Achse als positiver oder negativer Wert.

Das statische Moment von Flächen, speziell von solchen mit Löchern oder Aussparungen, lässt sich auch folgendermaßen berechnen: Man setzt die umschließende Fläche als positive und die Löcher/Aussparungen als negative Flächen an. Die Vorzeichen der Abstände sind nach der Orientierung des Koordinatenkreuzes zu ermitteln. Im nebenstehenden Beispiel (Abb. 3.4) stellt die Fläche  $A_2$  (mit dem Schwerpunkt  $s_2$  und den Schwerpunktskoordinaten  $(z_2, y_2)$ ) ein Loch in der größeren Fläche  $A_1$  (mit dem Schwerpunkt  $s_1$  und den Schwerpunktskoordinaten  $(z_1, y_1)$ ) dar. Die Schwerpunktskoordinaten  $(z_s, y_s)$  des Schwerpunktes  $s_{ges}$  der Gesamtfläche  $A_{ges} = A_1 - A_2$  können nun nach der gerade erklärten Vorgehensweise zu

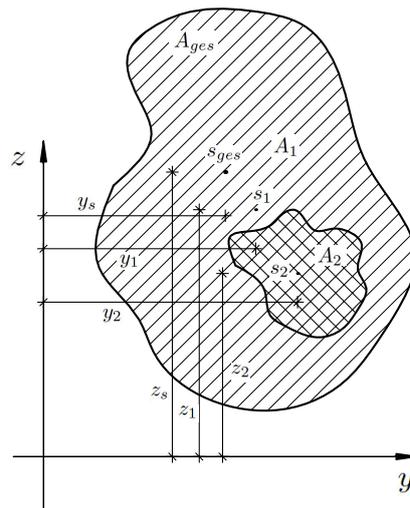


Abbildung 3.4: alternative Berechnung bei Löchern

$$y_s = A_1 \cdot y_1 + (-A_2) \cdot y_2 = A_1 \cdot y_1 - A_2 \cdot y_2 \quad (3.12)$$

$$z_s = A_1 \cdot z_1 + (-A_2) \cdot z_2 = A_1 \cdot z_1 - A_2 \cdot z_2 \quad (3.13)$$

bestimmt werden.

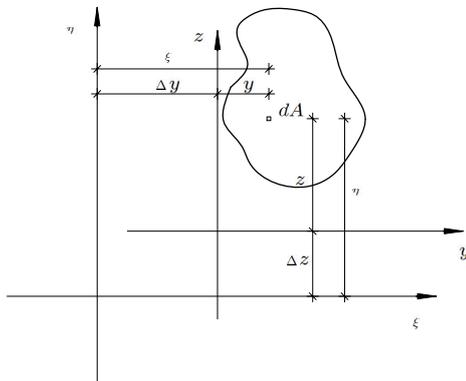


Abbildung 3.5: statisches Moment um parallel verschobene Koordinatenachsen

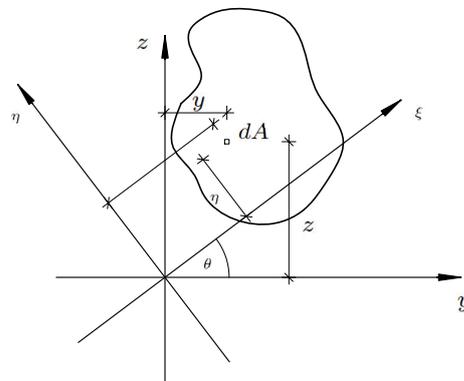


Abbildung 3.6: statisches Moment um verdrehte Koordinatenachsen

### Statische Momente um parallel verschobene Achsen

$$S_{\xi(\eta)} = \int_A \eta \cdot dA = \int_A (\Delta z + z_i) dA = \int_A \Delta z \cdot dA + \underbrace{\int_A z_i \cdot dA}_{=S_y} \quad (3.14)$$

$$\left( = \int_A \Delta z \cdot dA + \underbrace{S_y}_{=0 \text{ falls um Schwerachsen}} \right) \quad (3.15)$$

$$S_{\xi(\eta)} = \int_A \Delta z \cdot dA + S_y \quad (3.16)$$

Analog gilt um die verbleibende Achse:

$$S_{\eta(\xi)} = \int_A \Delta y \cdot dA + S_z \quad (3.17)$$

## Statische Momente um verdrehte Achsen

$$\eta = z \cdot \cos \varphi - y \cdot \sin \varphi \quad (3.18)$$

$$\xi = z \cdot \sin \varphi + y \cdot \cos \varphi \quad (3.19)$$

Die Koordinaten an den verdrehten, orthogonalen Achsen lassen sich als Funktionen beider (!) reguläre Koordinatenachsen anschreiben

$$S_\eta = \int \eta \, dA = \int (z \cdot \cos \varphi - y \cdot \sin \varphi) \, dA \quad (3.20)$$

$$= \int z \cdot \cos \varphi \cdot dA - \int y \cdot \sin \varphi \cdot dA \quad (3.21)$$

$$= \cos \varphi \int z \cdot dA - \sin \varphi \int y \cdot dA \quad (3.22)$$

$$= \cos \varphi \cdot \underbrace{S_y}_{=0} - \sin \varphi \cdot \underbrace{S_z}_{=0} \quad (3.23)$$

$$= 0$$

$$S_\xi = \int \xi \cdot dA = \sin \varphi \cdot \underbrace{S_y}_{=0} + \cos \varphi \cdot \underbrace{S_z}_{=0} = 0 \quad (3.24)$$

Befindet sich das Koordinatenkreuz im Schwerpunkt, misst man also alle Abstände vom Schwerpunkt aus, so ändert eine Rotation nichts am Wert der statischen Momente. Befindet sich das Koordinatenkreuz nicht im Schwerpunkt, so lässt sich ein Winkel bestimmen, unter welchem die Maximalwerte der statische Momente auftreten. Dieser wird durch 0-setzen der ersten Ableitung ermittelt.

$$\frac{dS_\xi}{d\varphi} = 0 \quad (3.25)$$

$$\frac{d}{d\varphi} (\sin \varphi \cdot S_y + \cos \varphi \cdot S_z) = 0 \quad (3.26)$$

$$\cos \varphi \cdot S_y - \sin \varphi \cdot S_z = 0 \quad (3.27)$$

$$\tan \varphi = \frac{S_y}{S_z} \quad (3.28)$$

Da die Tangensfunktion gleiche Werte alle  $\varphi + n\pi$  annimmt, ergibt sich für die Funktion des Winkels:

$$\tan \varphi + n \pi = \frac{S_y}{S_z} \quad (3.29)$$

Durch Ersetzen des Winkels

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_1 \\ \varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (3.30)$$

in der Funktion der statische Momente um verdrehte Achsen folgt:

$$\left. \begin{array}{l} S_{\xi,1} \\ S_{\xi,2} \end{array} \right\} \pm (\sin \varphi \cdot S_y + \cos \varphi \cdot S_z) \quad (3.31)$$

Die selbe Argumentation lässt sich für die statische Momente um die andere Achse durchführen und es ergibt sich:

$$\tan \varphi + n\pi = -\frac{S_z}{S_y} \quad (3.32)$$

$$\begin{array}{l} S_{\eta,1} \\ \} \pm (-\sin \varphi \cdot S_y - \cos \varphi \cdot S_z) \\ S_{\eta,2} \end{array} \quad (3.33)$$

Es folgt, dass die achsialen statische Momente einander jeweils paarweise entsprechen:

$$S_{\eta,1} = S_{\xi,2} \quad (3.34)$$

$$S_{\eta,2} = S_{\xi,1} \quad (3.35)$$

Die beiden Winkel lassen sich in Relation setzen

$$\underbrace{\tan \varphi_{\eta}}_{=+1 \text{ od. } -1} \cdot \underbrace{\tan \varphi_{\xi}}_{=-1 \text{ od. } +1} = -\frac{S_z}{S_y} \cdot \frac{S_y}{S_z} \quad (3.36)$$

$$\tan \varphi_{\eta} = +1 \quad \longrightarrow \quad \varphi_{\eta} = \frac{\pi}{4} \quad (3.37)$$

$$\tan \varphi_{\xi} = -1 \quad \longrightarrow \quad \varphi_{\xi} = -\frac{\pi}{4} \quad (3.38)$$

$$\varphi_{\eta} = \varphi_{\xi} + \frac{\pi}{2} \quad (3.39)$$

Es zeigt sich, wie erwartet, dass die Winkel der Maximal- und Minimalwerte sich um  $\frac{\pi}{2}$  unterscheiden.

### Statische Momente für zusammengesetzte Querschnitte

Um die statischen Momente zusammzusetzen - also zu superpositionieren - bedient man sich der gleichen Vorgehensweise wie bei den Kraftmomenten im

Abschnitt 2.3.2. Im Gegensatz zu den Kraftmomenten macht es hier aber keinen Sinn, Momente, welche sich auf verschiedene Achsen beziehen, zu einem statischen Moment zusammen zu fassen.

Bei der Zusammenfassung der Kraftmomente im Raum verlässt man sich auf das Produkt

$$M = F \cdot e \quad . \quad (3.40)$$

Bezieht man das Moment nun auf eine, von der ursprünglichen verschiedene Achse, so gilt nach

$$e_2 \neq e_1 \quad \text{auch} \quad F_2 \neq F_1 \quad . \quad (3.41)$$

Bezieht man das Moment auf eine verschobene Achse, so wird sich also die Kraft ändern, welche das Moment repräsentiert, sofern das Moment konstant bleiben soll, was es muss, da per Definition<sup>4</sup> Momentenfreiheit herrscht. Bei Flächenmomenten macht das aber nach der Definition

$$S_y = A \cdot z \quad (3.42)$$

keinen Sinn, da die Flächen kleiner werden müssten. Das heißt für

$$z_2 \neq z_1 \quad \text{müsste gelten} \quad A_2 \neq A_1 \quad . \quad (3.43)$$

Würde man Flächenmomente, welche sich auf verschiedene Achsen beziehen superpositionieren und dann auch eine Spannungsberechnung anwenden, so würde man mit kleineren Flächen rechnen, als eigentlich vorliegen. Um die Invarianz der Flächen gewährleisten zu können, rechnet man deshalb stets mit statischen (allgemein mit Flächenmomenten  $n$ . Ordnung), welche sich auf die gleichen Achsen beziehen. Man schreibt

---

<sup>4</sup>um den Schwerpunkt

$$S_y^{(s)} = \sum_{i=1}^n S_{y,i}^{(s)} , \quad (3.44)$$

wobei das Superskript  $^{(s)}$  darstellt, dass alle addierten Flächenmomente auf die selbe Achse  $s$  bezogen sind.

### 3.3 Flächenmoment 2. Ordnung - Flächenträgheitsmoment $I$

#### 3.3.1 Axiales Flächenträgheitsmoment $I_y$ u $I_z$

Das Flächenträgheitsmoment lässt sich leider nicht so einfach wie das statische Moment durch seine primäre Anwendung beschreiben (siehe Abschnitt 12.2). Zunächst, so unbefriedigend dies auch sei, mögen die axialen Flächenmomente 2. Ordnung daher wie folgt definiert sein<sup>5</sup>:

$$I_y = \lim_{\Delta A_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n i_{y,i}^2 \cdot \Delta A_i = \int_A i_{y,i}^2 \cdot dA_i \quad (3.45)$$

$$I_z = \lim_{\Delta A_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n i_{z,i}^2 \cdot \Delta A_i = \int_A i_{z,i}^2 \cdot dA_i , \quad (3.46)$$

wobei  $i_{y,i}$  und  $i_{z,i}$  die axialen Abstände von der gewählten Achse zu den einzelnen Differentialflächen darstellen. Entsprechen die gewählten Achsen den Schwerachsen, so erhält man das sog. **eigene Flächenträgheitsmoment**. Die Achse, um welche das Flächenträgheitsmoment einer Fläche ein Minimum bildet, ist übrigens nicht die Schwerachse, sondern jene Achse, um welche das Flächenträgheitsmoment beiderseits gleich groß sind. Für achsensymmetrische Flächen gilt jedoch:

<sup>5</sup>Oft wird, anstatt direkt den Flächenträgheitsradius zu verwenden, der Abstand  $z$  (wie beim statischen Moment) verwendet

flächenhalbierende Achse  
=  
Schwerachse  
=  
flächenträgheitsmomentminimierende Achse

Die Einheit des (axialen) Flächenträgheitsmomentes ergibt sich aus der Fläche  $A$  und dem Quadrat des Abstandes  $i_z$  bzw.  $i_y$  zu  $m^4$ .

Der axiale Trägheitsradius  $i_z$ , analog zu  $z_s$  ergibt sich zu

$$i_z = \sqrt{\frac{I_y}{\int^A dA}} = \sqrt{\frac{I_y}{A}} . \quad (3.47)$$

Auftragen aller auf die jeweiligen Achsen bezogenen Flächenträgheitsradien erzeugt eine Ellipse<sup>6</sup>. Es ist zu vermerken, dass das axiale Flächenträgheitsmoment, da der Abstand quadriert wird, immer positiv ist. Vorerst lässt sich sagen, dass das axiale Flächenträgheitsmoment ein Maß ist, wie stark sich ein Querschnitt gegen axiale Biegung sträubt. Das Integral kann natürlich an beliebigen Grenzen gebildet werden. Die meisten Anwendungen greifen jedoch auf die Grenzen zurück, welche sich aus der Schwerachse ergeben.

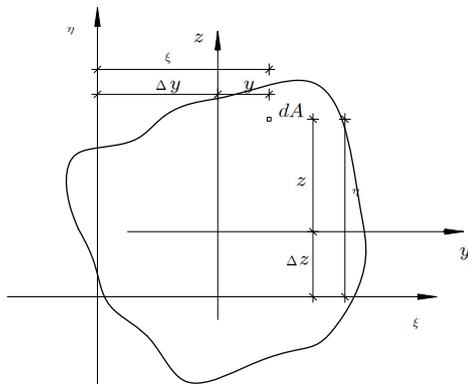


Abbildung 3.7: axiale Flächenträgheitsmomente um parallel verschobene Koordinatenachsen

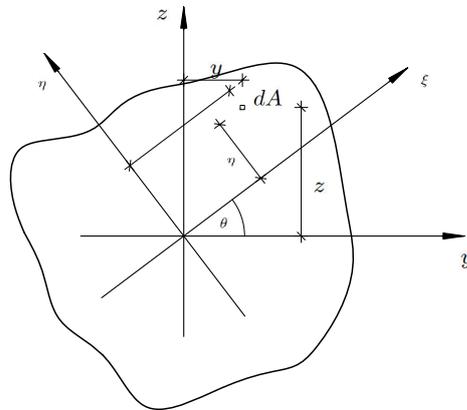


Abbildung 3.8: axiale Flächenträgheitsmomente um rotierte Koordinatenachsen

**Axiale Trägheitsmomente um parallel verschobene Achsen - Satz von Steiner**

$$I_{\eta(\xi)} = \int \xi + z^2 dA = \int (\Delta z + z)^2 dA = \int z^2 \cdot dA + 2 \int z \cdot \Delta z \cdot dA + \int \Delta z^2 \cdot dA \tag{3.48}$$

$$= I_y + 2 \cdot \underbrace{S_y}_{=0} + \int \Delta z^2 \cdot A \tag{3.49}$$

$$= I_y + \int \Delta z^2 A \tag{3.50}$$

Analog ergibt sich für Trägheitsmomente um die z-Achse:

$$I_{\xi(\eta)} = \int (\Delta z + z)^2 dA = I_z + \int \Delta z^2 A \tag{3.51}$$

Flächenträgheitsmomente um verdrehte Achsen lassen sich als die Summe aus den Eigentragheitsmomenten und den sog. **Steiner'schen Anteilen** anschreiben.

<sup>6</sup>sofern sich die Referenzachse/der Ursprung im Schwerpunkt befindet

**Axiale Trägheitsmomente um verdrehte Achse**

$$I_{\xi} = \int \eta^2 \cdot dA = \int (y \cdot \cos \varphi + z \cdot \sin \varphi)^2 dA \quad (3.52)$$

$$= \int y^2 \cdot \cos^2 \varphi \cdot dA + 2 \cdot \int y \cdot z \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot dA + \int z^2 \cdot \sin^2 \varphi \cdot dA \quad (3.53)$$

$$= I_z \cdot \cos^2 \varphi + 2 \cdot I_{yz} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi + I_y \cdot \sin^2 \varphi \quad (3.54)$$

$$= I_y \cdot \sin^2 \varphi + I_z \cdot \cos^2 \varphi + 2 \cdot I_{yz} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \quad (3.55)$$

Analog ergibt sich für Trägheitsmomente um die andere Achse:

$$I_{\eta} = \int \xi^2 \cdot dA \quad (3.56)$$

$$= I_z \cdot \sin^2 \varphi + I_y \cdot \cos^2 \varphi - 2 \cdot I_{yz} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \quad (3.57)$$

Um die 1. Ableitung zu vereinfachen, werden die quadratischen Winkelfunktionen ersetzt und es ergibt sich:

$$I_{\eta} = \frac{I_z + I_y}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\varphi - I_{yz} \cdot \sin 2\varphi \quad (3.58)$$

$$I_{\xi} = \frac{I_z + I_y}{2} - \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\varphi + I_{yz} \cdot \sin 2\varphi \quad (3.59)$$

Auf gleiche Weise, wie für die Momente 1. Ordnung, lässt sich wieder ein Winkel finden, unter welchem die Flächenträgheitsmomente maximal bzw. minimal sind. Mittels der gleichen Vorgehensweise erhält man für die Maximalwerte

$$\left. \begin{array}{l} I_\xi \\ I_\eta \end{array} \right\} \frac{I_y + I_z}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4I_{yz}^2} \quad (3.60)$$

und für den Winkel zwischen ihnen

$$\tan 2\varphi = -\frac{I_y - I_z}{2I_{yz}} \quad (3.61)$$

Im Abschnitt (9.2) wird man erkennen, dass es genau die gleichen Formeln wie jene für die Hauptspannungen sind (vgl. (3.58) mit (9.49) bzw. (3.59) mit (9.50))

### 3.3.2 Deviationsmoment $I_{yz}$

Das **Deviationsmoment**<sup>7</sup> ist analog zum Flächenträgheitsmoment wie folgt zu formulieren

$$I_{yz} = \lim_{\Delta A_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n i_{y,i} \cdot i_{z,i} \cdot \Delta A_i = \int_A i_{y,i} \cdot i_{z,i} \cdot dA_i \quad (3.62)$$

wobei  $i_y$  und  $i_z$  den jeweiligen Abständen zu ihrer Achse entsprechen.

Die Abstände  $i_y$  und  $i_z$  können, abhängig vom Quadranten der Teilfläche, jeweils positive oder negative Koordinaten annehmen, d. h. das Deviationsmoment eines Querschnitts kann sowohl positiv, 0, wie auch negativ sein.

Die Werte dieser Abstände können analog zum Flächenträgheitsradius wie folgt ermittelt werden

$$i_y = \frac{I_{yz}}{\int^A dA \cdot i_z} = \frac{S_y}{A \cdot i_z} \quad (3.63)$$

Das Deviationsmoment eines Querschnitts ist lt. (3.62) gleich 0, wenn, und nur

<sup>7</sup>Auch Zentrifugalmoment oder biaxiales Flächenträgheitsmoment

wenn mindestens eine der Achsen, auf welche sich bezogen wird, eine Hauptträgheitsachse ist. Der Begriff der Hauptträgheitsachse wird bald geklärt werden. Zunächst wird der Satz „Symmetrieachsen sind Hauptträgheitsachsen“ beim Verständnis Hilfe bereiten. Unter Anderem kann das Deviationsmoment als ein Maß für die Flächensymmetrie eines Querschnittes angesehen werden.

### Deviationsmomente um parallel verschobene Achsen

$$I_{\eta\xi} = \int (\eta + y)(\xi + z) dA \quad (3.64)$$

$$= \int \eta \cdot z \cdot dA + \int \eta \cdot \xi \cdot dA + \int y \cdot z \cdot dA + \int \xi \cdot y \cdot dA \quad (3.65)$$

$$= \eta \int z \cdot dA + \eta \cdot \xi \int dA + y \cdot z \int dA + \xi \int y \cdot dA \quad (3.66)$$

$$= \eta \underbrace{S_y}_{=0} + \eta \cdot \xi \cdot A + I_{yz} + \xi \cdot \underbrace{S_z}_{=0} \quad (3.67)$$

$$= I_{yz} + \xi \cdot \eta \cdot A \quad (3.68)$$

Analog der axialen Trägheitsmomente berechnen sich Deviationsmomente als eine Summe aus dem Eigenträgheitsmomenten und den Steiner'schen Anteilen.

### Deviationsmomente um verdrehte Achse

Koordinatentransformationen siehe Appendix

$$\eta = z \cdot \cos \varphi - y \cdot \sin \varphi \quad (3.69)$$

$$\xi = z \cdot \sin \varphi + y \cdot \cos \varphi \quad (3.70)$$

$$I_{\eta\xi} = \int \eta \cdot \xi \cdot dA = \int (z \cdot \cos \varphi - y \cdot \sin \varphi) (z \cdot \sin \varphi + y \cdot \cos \varphi) dA \quad (3.71)$$

$$\begin{aligned} &= - \int y^2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot dA \\ &\quad + \int yz \cdot \cos^2 \varphi \cdot dA \\ &\quad - \int zy \cdot \sin^2 \varphi \cdot dA \\ &\quad + \int z^2 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi \cdot dA \end{aligned} \quad (3.72)$$

$$\begin{aligned} &= - I_y \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot dA \\ &\quad + I_{yz} \cdot \cos^2 \varphi \cdot dA \\ &\quad - I_{yz} \cdot \sin^2 \varphi \cdot dA \\ &\quad + I_z \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi \cdot dA \end{aligned} \quad (3.73)$$

$$= (I_z - I_y) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi + I_{yz} \cdot (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \quad (3.74)$$

Die Maximalwerte der Deviationsmomente errechnen sich nach der selben Vorgehensweise wie die der anderen Extrema Berechnungen. Man erhält

$$\boxed{\begin{array}{l} I_{yz,1} \\ \left. \vphantom{I_{yz,1}} \right\} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4I_{yz}^2} \\ I_{yz,2} \end{array}} \quad (3.75)$$

### 3.3.3 Polares Flächenträgheitsmoment $I_p$

Analog der axialen Trägheitsmomente ist das polare Trägheitsmoment als die Summe der Flächenteile, multipliziert mit deren quadrierten Abständen, jedoch zu einem Punkt  $p$  definiert. Dieser Punkt wird als sog. **Bezugspunkt** (oder Drehpunkt) bezeichnet. Die Formel des polaren Trägheitsmoment  $I_p$  ergibt sich daher aus dem Abstand  $r$  und den Teilflächen  $dA$  zu

$$I_p = \lim_{\Delta A_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n r^2 \cdot \Delta A_i = \int_A r^2 \cdot dA_i \quad (3.76)$$

Der Abstand  $r$  ist dabei als jener zwischen dem Punkt  $p$ , um welchen das polare Trägheitsmoment bestimmt wird, und dem Schwerpunkt der Differentialfläche  $dA$  zu verstehen. Der Trägheitsradius ergibt sich analog dem achsialen Trägheitsradius zu

$$r = \sqrt{\frac{I_p}{\int^A dA}} = \sqrt{\frac{I_p}{A}} \quad (3.77)$$

Das Auftragen aller polaren Flächenträgheitsradien erzeugt im Gegensatz zu den Achsialen einen Kreis.

#### Identität des polaren Flächenträgheitsmomentes

Das polare Flächenträgheitsmoment lässt sich als Summe der achsialen Flächenträgheitsmomente anschreiben:

$$I_p = I_y + I_z \quad (3.78)$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung lässt sich durch expandieren der Summanden zeigen:

$$I_p = I_y + I_z \quad (3.79)$$

$$= \int z^2 \cdot dA + \int y^2 \cdot dA \quad (3.80)$$

$$= \int (z^2 + y^2) dA \quad (3.81)$$

$$= \int r^2 \cdot dA \quad (3.82)$$

### Polare Flächenträgheitsmomente um „parallel verschobene Achsen“

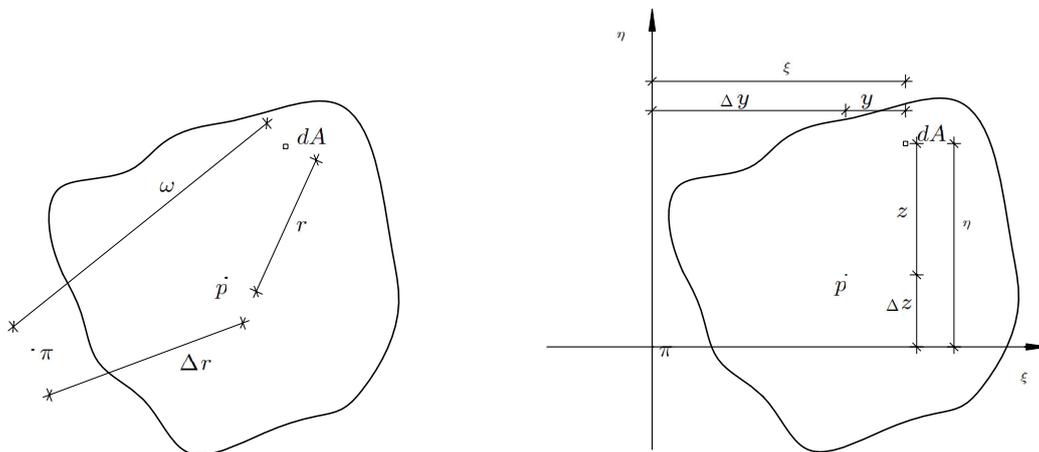


Abbildung 3.9: polares Flächenträgheitsmoment um einen verschobenen Bezugspunkt

Die Herleitung beginnt mit einer einfachen Folgerung der zuletzt behandelten Identität. Das polare Flächenträgheitsmoment ist gleich der Summe der axialen Flächenträgheitsmomente, egal, welcher Bezugspunkt gewählt ist. Daher ergibt sich analog das polare Flächenträgheitsmoment um  $I_\omega$ , um einen um den Radius  $\Delta r$  exzentrierten Bezugspunkt  $\pi$  zu:

$$I_p = I_y + I_z \quad (3.83)$$

$$\begin{aligned} I_\omega &= I_\xi + I_\eta \\ &= \left( I_y + \int z^2 \cdot dA \right) + \left( I_z + \int y^2 \cdot dA \right) \\ &= I_y + I_z + \int \Delta z^2 \cdot dA + \int \Delta y^2 \cdot dA \\ &= I_p + \int (\Delta z^2 + \Delta y^2) dA \\ &= I_p + \int \Delta r^2 dA \end{aligned} \quad (3.84)$$

Das polare Flächenträgheitsmoment ergibt sich also analog durch den Satz von Steiner.

### Polare Flächenträgheitsmomente um „verdrehte Achse“

Der Radius ist einer Rotation gegenüber invariant. Es folgt:

$$I_{p(\varphi)} = I_p \quad (3.85)$$

## 3.4 Kennwerte ausgewählter Querschnitte

Die Flächenmomente sind nur von der Querschnittsfigur, also dessen Abmessungen abhängig. Im Folgenden werden daher verschiedene Querschnitte mit deren Flächenmomenten angeführt.

Außerdem werden lt. Abb. 3.11 für das im Bauwesen sehr häufig verwendete *I*-Profil Formeln zur Abschätzung<sup>8</sup> der Flächenmomente angegeben.

<sup>8</sup>Man vernachlässigt dabei Rundungen in den Ecken, welche gezwungenermaßen durch die Herstellungsprozesse entstehen.

Querschnitt	Schwerachsen- abstand $e$	Flächenmoment 2. Grades $I$	Widerstands- moment $W = I/e$
	1. $\frac{h}{2}$ 2. $\frac{H}{2}$	1. $\frac{bh^3}{12}$ 2. $\frac{b}{12}(H^3 - h^3)$	1. $\frac{bh^2}{6}$ 2. $\frac{b}{6H}(H^3 - h^3)$
	3. $\frac{a}{2}$ 4. $\frac{a}{2}\sqrt{2}$	3. $\frac{a^4}{12}$ 4. $\frac{a^4}{12}$	3. $\frac{a^3}{6}$ 4. $0,1179a^3$
	5. $0,866r$ 6. $r$	5. $0,5413r^4$ 6. $0,5413r^4$	5. $\frac{5}{8}r^3 = 0,625r^3$ 6. $0,5413r^3$
	$0,9239r$	$0,6381r^4$	$0,6906r^3$
	$e_1 = \frac{h}{3}$ $e_2 = \frac{2}{3}h$	$I_y = \frac{bh^3}{36}$ $I_z = \frac{hb^3}{48}$	$W_{y_0} = \frac{bh^2}{24}$ $W_{v_0} = \frac{bh^2}{12}$ $W_z = \frac{hb^2}{24}$
	$e_1 = \frac{h}{3}$ $e_2 = \frac{2}{3}h$	$I_y = \frac{b \cdot h^3}{36}$ $I_z = \frac{hb^3}{36}$ $I_{yz} = -\frac{b^2h^2}{72}$	$W_{y_0} = \frac{bh^2}{24}$ $W_{v_0} = \frac{bh^2}{12}$
	10. $\frac{d}{2}$ 11. $\frac{D}{2}$	10. $\frac{\pi d^4}{64} \approx 0,05 d^4$ 11. $\frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$	10. $\frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1 d^3$ 11. $\frac{\pi}{32} \cdot \frac{D^4 - d^4}{D}$

Abbildung 3.10: Flächenmomente ausgewählter Querschnitte [Biener u. a. [2012]]

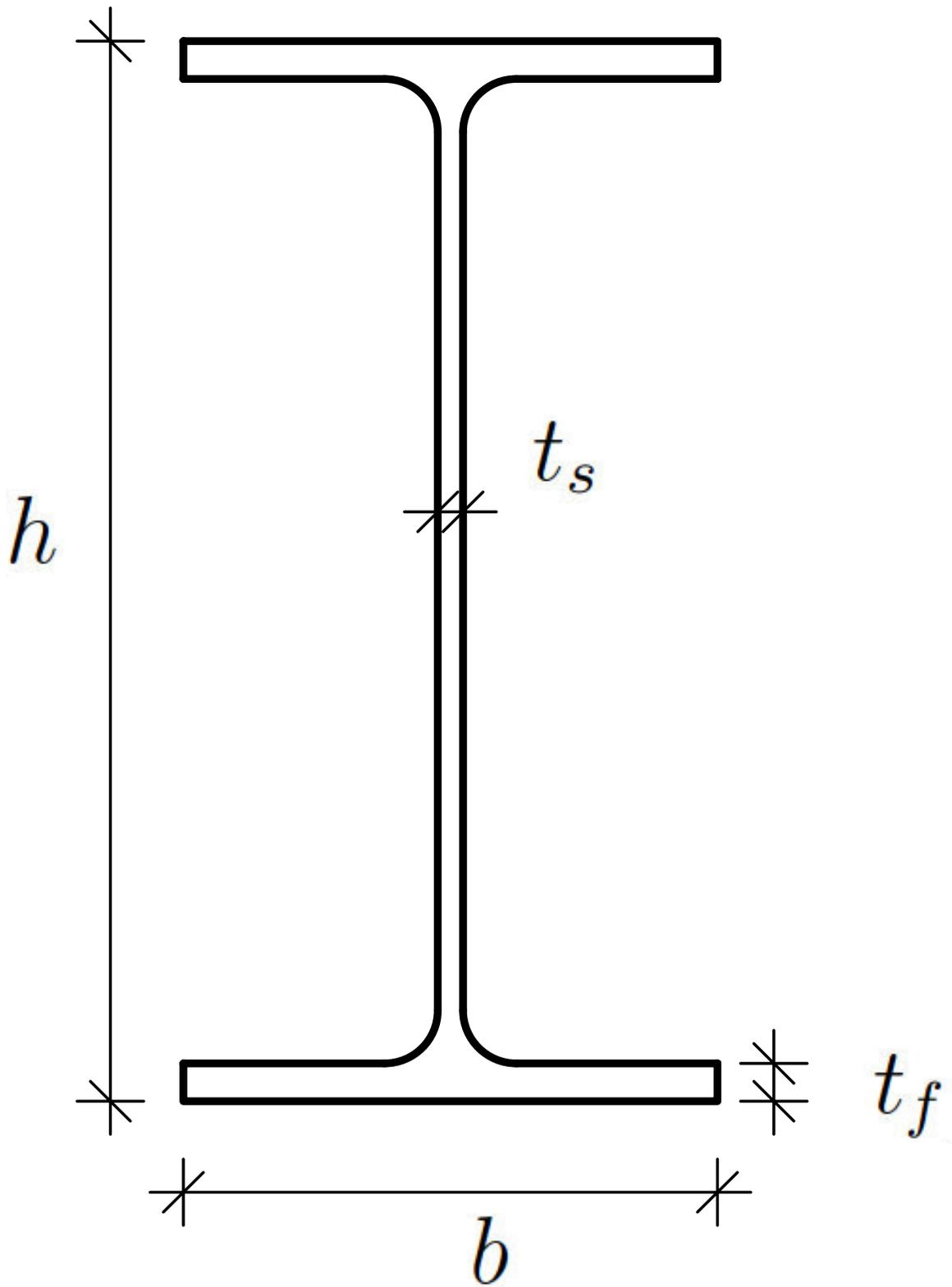


Abbildung 3.11: Abmessungen des  $I$ -Profil

$$A = 2(b \cdot t_f) + t_s (h - 2 \cdot t_f) \quad (3.86)$$

$$S_y = \frac{(h - t_f) \cdot b \cdot t_f}{2} + \frac{(h - 2 \cdot t_f)^2}{8} \quad (3.87)$$

$$I_y = \frac{(h - t_f)^3 \cdot t_f}{12} + 2 \cdot \left[ \frac{t_f^3 \cdot b}{12} + b \cdot t_f \cdot \left( \frac{h - 3 t_f}{2} \right)^2 \right] \quad (3.88)$$

Für genaue Angaben über gängige, normierte  $I$ -Profile, sowie andere Querschnittsfiguren und Querschnittskennwerte wird auf die umfangreiche Literatur ([Luza und Palka [2011]], [Biener u. a. [2012]], [Krapfenbauer und Strässler [1993]]) verwiesen.

# Kapitel 4

## Grundlagen der Tragwerkslehre

### 4.1 Definition eines Tragwerks

Ein Tragwerk ist eine Struktur aus stabförmigen und flächenartigen Traggliedern (Tragwerksteilen), dessen primäre Aufgabe die Ableitung von Lasten und Garantie des Gleichgewichts<sup>1</sup> eines Bauwerks ist. Der Begriff Tragwerk bezeichnet damit unterschiedliche Ausführungen und Anordnungen von Bauteilen, ohne auf deren Baustoffe und mechanischen Eigenschaften einzugehen.

Nach dem Verhältnis der Maße eines Tragwerks unterscheidet man 3 Tragwerkstypen:

#### 1. Stabtragwerke

Stabtragwerke bestehen ausschließlich aus Stäben bzw. Balken. Stäbe und Balken sind dadurch definiert, dass ihre Längsausdehnung  $l$  viel größer ist, als ihre Querausdehnungen  $b$  und  $h$ , nämlich so groß, dass diese in der Modellvorstellung vernachlässigt werden können. Es gilt

$$\frac{l}{b} \gg 1 \quad \text{und} \quad \frac{l}{h} \gg 1. \quad (4.1)$$

---

<sup>1</sup>In der Tragwerkslehre bedeutet Gleichgewicht, dass es zu keinerlei Beschleunigung bzw. übermäßiger Gestaltänderung kommt.

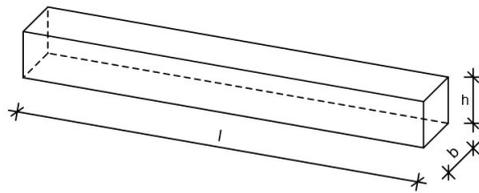


Abbildung 4.1: Modell eines Stabtragwerks

## 2. Flächentragwerke

Im Gegensatz zu Stabtragwerken kann bei Flächentragwerken eine der beiden Querausdehnungen (konventionell mit  $b$  bezeichnet) nicht mehr vernachlässigt werden. Es gilt nun

$$\frac{l}{h} \gg 1, \quad \frac{b}{h} \gg 1 \quad \text{sowie} \quad l \cong b. \quad (4.2)$$

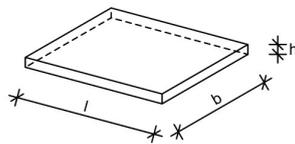


Abbildung 4.2: Modell eines Flächentragwerks

## 3. Volumentragwerke (a.B. kompakte Körper)

Bei Volumentragwerken kann keine der räumlichen Ausdehnungen vernachlässigt werden. Somit gilt

$$l \cong b \cong h. \quad (4.3)$$

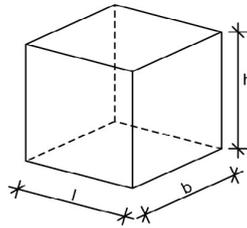


Abbildung 4.3: Modell eines Volumentragwerks

Ihr großes Volumen und das damit einhergehende große Gewicht führen zu einer Unzweckmäßigkeit, weswegen sie in der Bautechnik und in statischen Überlegungen eine stark untergeordnete Rolle spielen. In der Festigkeitslehre, dienen sie jedoch für Probeuntersuchungen (z.B. Probewürfel).

Zusätzlich können Tragwerke nach ihrer Lage im Raum abgegrenzt werden:

#### 1. Lineare Tragwerke

Alle für das statische Modell wesentlichen Strecken, liegen auf einer Linie. Als Beispiel sei hier das Abbild 4.4 angeführt, welches einen Träger auf zwei Stützen darstellt. Wie oben schon angeführt, kann ein Stabtragwerk auf eine Dimension reduziert werden. So liegt die einzige für dieses Modell wichtige, Kote I auf einer Achse.

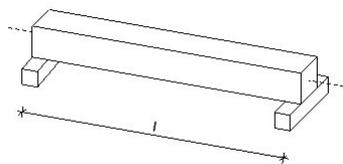


Abbildung 4.4: Beispiel für ein lineares Tragwerk

#### 2. Ebene Tragwerke

Alle für das statische Modell wesentlichen Strecken liegen in einer Ebene.

Obwohl bei Stabtragwerken zwei Ausdehnungen vernachlässigt werden können, zählt ein aus Stäben aufgebautes Fachwerk, wie in Abbildung 4.5 a dargestellt, zu den ebenen Tragwerken, da seine für das statische Modell wichtigen Abmessungen  $l$  und  $h$  nicht mehr in einer Linie liegen, sondern eben in einer Ebene. Jedes Flächentragwerk, wie die in Abbildung 4.5 b dargestellte Platte ist definitionsgemäß ein Flächentragwerk.

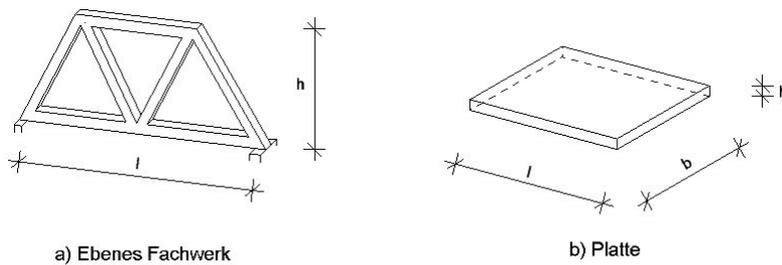


Abbildung 4.5: Beispiele für ebene Tragwerke

### 3. Räumliche Tragwerken

Keine der drei Raumachsen kann bei der statischen Modellbildung ignoriert werden. Es gibt Strecken in alle 3 Koordinaten, welche für die statischen Überlegungen von Einfluss sind.

Die zu 4.5 a geführten Überlegungen lassen sich äquivalent zu dem in 4.6 a dargestellten Trägerrost und der in 4.6 b dargestellten Schale übertragen. Ebenfalls ident lässt sich die Argumentation von 4.5 b auf das Volumentragwerk in 4.6 c übertragen.

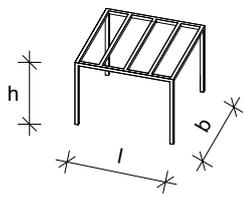


Abb. 1.6 a

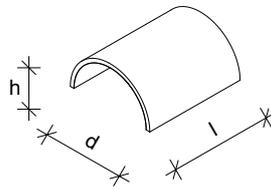


Abb. 1.6 b

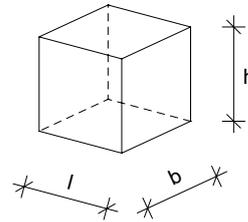


Abb. 1.6 c

Abbildung 4.6: Beispiele für räumliche Tragwerke

## 4.2 Bestandteile eines Tragwerks

### 4.2.1 Stäbe und Balken

Stäbe und Balken sind die zwei Arten von idealisierten Stabtragwerken, d.h. je zwei ihrer Dimensionen können gegenüber der dritten, maßgebenden Dimension vernachlässigt werden. Verallgemeinert könnte man sagen, sie dienen der Übertragung von Kräften und Momenten zwischen zwei Punkten; sie „tragen“ Lasten ab. Somit bilden Stäbe und Balken das eigentliche Tragwerk.

In der Bautatik werden Stabtragwerke, welche nur in der Stabachse (also durch Normalkraft und Torsion) belastet werden als Stäbe bezeichnet, im Unterschied zu Balken, welche neben Belastungen in Achsenrichtung auch Belastungen quer zur Achsenrichtung (Querkräfte, Biegemomente) aufnehmen können.

Stäbe und Balken werden in statischen Modellen auf ihre Stabachse reduziert. Die Stabachse ist als die Summe der Schwerpunkte aller infinitesimal dünnen Querschnitte definiert.

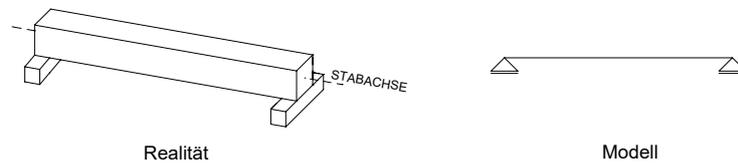


Abbildung 4.7: Darstellung eines Stabes in der Tragwerkslehre

### 4.2.2 Auflager

Nur selten bestehen statische Systeme aus einzelnen Stäben, Balken oder Platten. Im Regelfall handelt es sich um eine Zusammensetzung vieler solcher Elemente. Der Einfachheit halber, zerteilt man nun statische Systeme in ihre Einzelteile, um dann gesondert jedes dieser Einzelteile einzeln zu untersuchen. Trotzdem kann man nicht vernachlässigen, dass die einzelnen Systeme miteinander interagieren. Jener Einfluss wird bei der Zerteilung des Gesamtsystems mit Auflagern simuliert. Auflager sind also jene Stellen, an denen ein statisches System gedanklich zerschnitten wird.

Zwei Einzelteile eines Systems haben zwei Arten, wie sie sich gegenseitig beeinflussen können: Deformationen und Kräfte bzw. Momente<sup>2</sup>. Ein in der Ebene betrachteter Träger weist drei Freiheitsgrade auf, welchen jeweils eine übertragbare Kraft bzw. Moment korrespondieren. Dadurch ergeben sich drei Paare an Auflagergrößen, welche als Randbedingungen auf das System einwirken:

- Horizontalverschiebung  $u$  - horizontalen Lagerkraft  $A_H$
- Vertikalverschiebung  $v$  - vertikale Lagerkraft  $A_V$
- Verdrehung  $\varphi$  - Einspannmoment  $M_A$

Die drei Kraftgrößen werden als Auflagerreaktionen bezeichnet. Es sind jene Kräfte-

<sup>2</sup>Kräfte und Momente werden in der Statik als Kraftgrößen zusammengefasst.

te und Momente, welche das Auflager übertragen kann. Jedoch kann nicht jedes Auflager, jede Auflagerreaktion übertragen. Die Anzahl der Auflagerreaktionen die ein Auflager übertragen kann, wird als Wertigkeit<sup>3</sup> des Auflagers bezeichnet. Eine Liste von möglichen Kombinationen an übertragbaren Kraftgrößen ist in Tab. 4.1 dargestellt.

Auflager werden immer als starr idealisiert. Ein Körper ist dann starr, wenn eine Kraft diesen Körper nur beschleunigen, jedoch nicht deformieren kann. Dadurch, dass sich ein Auflager nicht deformiert kann (und eine Beschleunigung als Forderung an die Stabilität ausgeschlossen ist), folgt dass jegliche Deformation des Stabes an einem Auflager null ist. Es gilt aber wie oben, dass nicht jedes Auflager alle dualen Paare übertragen kann, also einige Auflager (mangels Auflagerreaktion) die dazu korrespondierenden Verformungen zulassen.

Aus dieser Überlegung lässt sich ein Berechnungsschema ableiten, anhand dessen man die Auflagergrößen berechnen kann. Dadurch, dass immer eine Größe eines Auflagergrößenpaares null ist, kann sein zugehöriger Partner kalkuliert werden.

Es ergeben sich jene in Tab. 4.1 dargestellten Lagerungsformen.

Es sei nochmal darauf hingewiesen, dass sich diese Auflagerarten auf den ebenen Fall beschränken. Selbstverständlich ließen sie sich auch auf den räumlichen Fall erweitern. Es muss jedoch beachtet werden, dass es im Raum sechs Freiheitsgrade gibt.

Ebenfalls sei hier angemerkt, dass sich die Tragwerkslehre grundsätzlich auf punktförmige Auflager beschränkt. Dies ist insoweit möglich, dass es für die Stabilität eines Tragwerks unerheblich ist, ob ein Auflager punktförmig, linear oder gar flächenhaft ist, solange es dieselben Auflagerreaktionen überträgt. Selbst in Fällen, wo Werte, welche sich aus einem linearen Auflager ergeben von aus nicht

---

<sup>3</sup>Dieses Vokabular wird uns später bei der Bestimmung der Stabilität eines statischen Systems noch einmal begegnen.

<sup>4</sup>Das freie Ende wird nicht als Auflager bezeichnet und wurde nur zu Vollständigkeit angeführt.

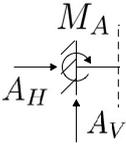
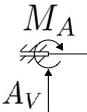
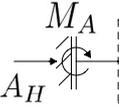
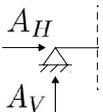
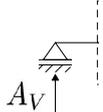
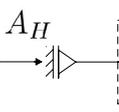
Bezeichnung	Symbol	Vorgegeben	Unbekannt	Wertigkeit W
Starre Einspannung		$u = 0$ $w = 0$ $\varphi = 0$	$A_H$ $A_V$ $M_A$	$W = 3$ „dreiwertig“
Verschiebliche Einspannung	– Längs- 	$A_H = 0$ $w = 0$ $\varphi = 0$	$u$ $A_V$ $M_A$	$W = 2$ „zweiwertig“
	– Quer- 	$u = 0$ $A_V = 0$ $\varphi = 0$	$A_H$ $w$ $M_A$	$W = 2$ „zweiwertig“
Feste Gelenklager		$u = 0$ $w = 0$ $M_A = 0$	$A_H$ $A_V$ $\varphi$	$W = 2$ „zweiwertig“
Bewegliches Gelenklager/ Loslager	– Horizontal 	$A_H = 0$ $w = 0$ $M_A = 0$	$u$ $A_V$ $\varphi$	$W = 1$ „einwertig“
	– Vertikal 	$u = 0$ $A_V = 0$ $M_A = 0$	$A_H$ $w$ $\varphi$	$W = 1$ „einwertig“
Freies Ende <sup>4</sup>		$A_H = 0$ $A_V = 0$ $M_A = 0$	$u$ $w$ $\varphi$	$W = 0$

Tabelle 4.1: Arten von Auflagern

statischen Gründen von Bedeutung sind<sup>5</sup>, rechnet man in der Modellvorstellung mit punktförmigen Auflagern und rechnet dann die damit erzielten Ergebnisse auf eine Länge bzw. Fläche um.

### 4.2.3 Federungen

In der Praxis gibt es selbstverständlich kein Auflager, welches ideal starr ist. Meist sind jedoch die Verformungen des Auflagers gering genug, um der Einfachheit halber vernachlässigt zu werden ohne das Ergebnis signifikant zu verändern. In seltenen Fällen ist dies nicht möglich. Dann spricht man von Federungen.

Bei Federungen kann nur dann einer der oben erwähnten Auflagerpartner null sein, wenn auch der andere null ist. Wächst dann eine dieser Größen an, so wächst auch die andere direkt proportional mit.

Nach der übertragbaren Kraftgröße lassen sich zwei Federungen unterscheiden:

#### 1. Dehnfeder

Hier wächst die Gegenkraft mit der Größe der Stauchung bzw. der Dehnung, also ihrer Längenverformung.

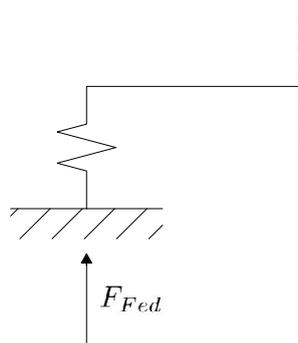


Abbildung 4.8: Darstellung einer Dehnfeder in der Tragwerkslehre

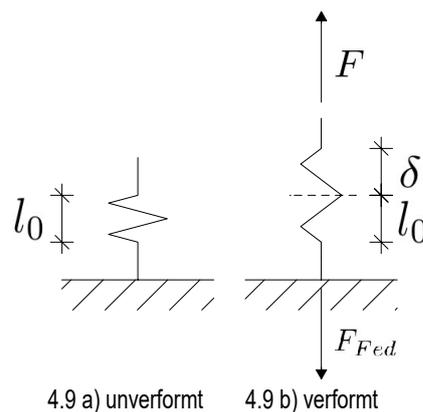


Abbildung 4.9: Prinzip einer Dehnfeder

<sup>5</sup>Z.B. Zur Berechnung der nötigen Einbindungstiefe von einbetonierten Stäben.

$$F_{Fed} = c_N \cdot \delta \quad (4.4)$$

Hierbei ist

- $F_{Fed}$  jene Kraft, welche die Feder in ihre Ursprungsform zurückversetzen will. Sie heißt Federkraft und ist bei Zug der Feder positiv.
- $c_N$  die Dehnfedersteifigkeit<sup>6</sup> in kN/m. Sie wird als konstant angenommen.
- $\delta$  der Federweg infolge  $F$ .
- $F$  die Kraft, mit welcher die Feder verformt wird.

Aus Gleichgewichtsüberlegungen folgt:

$$F = -F_{Fed} \quad (4.5)$$

## 2. Drehfeder

Hier wächst das Gegenmoment mit der Größe der Verdrehung der Feder.

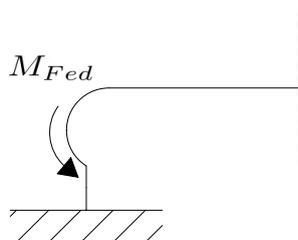


Abbildung 4.10: Darstellung einer Drehfeder in der Tragwerkslehre

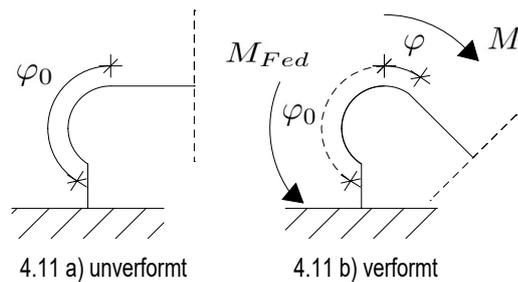


Abbildung 4.11: Prinzip einer Drehfeder

<sup>6</sup>Intuitiv kann man sich  $c_N$  als einen Widerstand gegenüber einer Verformung von 1m vorstellen (Siehe Hook'sches Gesetz). Definiert ist es als der Reziprokwert der Längenänderung  $\delta$  infolge einer Kraft von 1 kN.

$$M_{Fed} = c_M \cdot \varphi \quad (4.6)$$

Analog zur Dehnfeder ist hier

- $M_{Fed}$  das Federmoment, es hat keine konventionelle Ausrichtung.
- $c_M$  die Drehfederstiefigkeit in kNm. Die Konstante gibt das Moment an, welches für eine Verdrehung von  $1rad = 57,3^\circ$  benötigt wird.
- $\varphi$  der Winkel infolge  $M$ , gemessen in Rad.
- $M$  das Moment, welches die Feder verdreht.

Auch hier gilt wieder:

$$M = -M_{Fed} \quad (4.7)$$

Diese beiden Arten von Federungen sind jeweils einwertig. Für mehrwertige Federungen kann man sich einen Zusammenschluss mehrerer solcher einwertigen Federungen in unterschiedlichen Ausrichtungen vorstellen.

Für die in diesem Kapitel diskutierte Bestimmung der Stabilität eines Tragwerks hat eine Unterscheidung zwischen Feder und Auflager keinen Einfluss. Daher wurden sie nur der Vollständigkeit halber angeführt. Allerdings wirken sie sich auf das Verformungsverhalten von Tragwerken aus, wie wir später noch sehen werden.

#### 4.2.4 Lasten

Zwei Systeme können statisch betrachtet also auf zwei Arten interagieren: Kraftgrößen und Deformationen. Lasten ist der Name welcher für Kraftgrößen gebräuchlich ist. Sie sind also wie Auflager Substitutionen von äußeren Einflüssen. Generell versteht man unter Lasten Kraftgrößen, welche als Anfangsbedingungen auf das Tragwerk einwirken und Auflagerreaktionen, Schnittgrößen, Spannungen und Deformationen hervorrufen.

Lasten sind also die am Anfang gegebenen Einflüsse der Umwelt, welche auf das Tragwerk einwirken; Auflager simulieren dann den Widerstand den andere Tragwerke der durch die Lasten geforderten Beschleunigung entgegensetzen und lassen diese durch Auflagerreaktionen verschwinden.

Da wir uns auf Stabtragwerke limitieren, brauchen wir uns nur mit Punkt- und Linienlasten beschäftigen. Wird dann noch weiter zwischen Kräften und Momenten entschieden, so kann man folgende Übersicht erstellen:

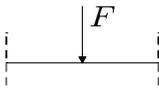
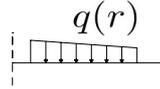
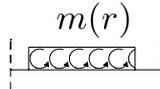
	Punktförmige Lasten	Linienlasten
Kraft	<p>Einzelkraft</p> 	<p>Linienkraft<sup>7</sup></p> 
Moment	<p>Einzelmoment</p> 	<p>Linienmoment</p> 

Tabelle 4.2: Überblick über die Lastarten

Lasten werden (wie alle Vektoren) mittels Pfeilen dargestellt. Deren Richtung gibt die Richtung der Last an, die Länge kann der Größe entsprechen. Meistens verwendet man jedoch aus ästhetischen Gründen eine Einheitslänge und beschriftet die Pfeile dann mit ihrer Größe. Anders ist dies bei linearen Lasten, deren Höhe die Kraft an diesem Punkt angibt (dies ist notwendig um verschiedene Kraftverläufe unterscheiden zu können). Da der Momentenvektor zweidimensional nicht darstellbar ist, wird er durch gekrümmte Pfeile dargestellt, dessen Orientierung

<sup>7</sup>Obwohl Linienlasten lineare Kräfte und Momente allgemein bezeichnet, wird er konventionell, mangels Häufigkeit von Linienmomenten, auch für Linienkräfte verwendet.

die Drehrichtung angibt.

Die mathematische Behandlung von Lasten wird in Abschnitt 1.5.4 behandelt. Im Moment reicht das pure Wissen von deren Existenz, sowie deren Rolle im Aufbau eines Tragwerkes aus.

### 4.2.5 Knotenpunkte

Auflager werden bei einem Schnitt durch ein statisches System eingesetzt und simulieren den Einfluss von anderen Bauteilen auf den untersuchten. Ist es jedoch günstiger ein größeres System zu betrachten, so verschwinden die Auflager und werden durch Knotenpunkte (auch Anschlüsse genannt) ersetzt. Knotenpunkte sind also gleichwertig mit Auflagern, werden jedoch nicht trennend sondern verbindend eingesetzt<sup>8</sup>.

So ergeben sich wie bei Auflagern drei bzw. sechs Paare an Kraft- und Weggrößen, welche jeweils korrespondieren. Die Deformationen werden aber anstatt an Auflagerreaktionen an innere Kraftgrößen gebunden, welche als Schnittgrößen bezeichnet werden und mit denen wir uns noch ausführlich beschäftigen werden. Hier sei nur vorweg genommen, dass Schnittgrößen jene Kräfte und Momente sind, welche ein Stab übertragen kann. Im zweidimensionalen Fall gibt es folgende Schnittgrößen, welche durch folgende Auflagerreaktionen substituiert werden:

- Normalkraft  $N \cong$  horizontalen Lagerkraft  $A_H$
- Querkraft  $V \cong$  vertikale Lagerkraft  $A_V$
- Drehmoment  $M \cong$  Einspannmoment  $M_A$

Die Bedingung, dass die Deformation null ist, wird ebenfalls fallen gelassen und durch die Forderung ersetzt, dass an beiden Enden eines Punktes die Verformung gleich groß ist. Eine Annahme, dass die Deformationen aller Stäbe am

---

<sup>8</sup>Formal müsste man sagen, dass Auflager Schnitte durch Knoten sind.

Knoten verschwindet wäre zwar denkbar, widerspricht jedoch dem Gedanken, dass man Knoten genau deswegen Auflagern vorzieht, um ein System (vor allem sein Deformationsverhalten) akkurater zu beschreiben.

Aus der Forderung, dass die Deformation auf beiden Seiten eines Punktes gleich groß ist, lassen sich mit der Annahme, dass der Knotenpunkt ebenfalls ideal starr<sup>9</sup> ist, weitere Nebenbedingungen folgern. So ist eine gleichbleibende Deformation nur dann möglich, wenn eine Kraft vorhanden ist, welche eine weitere verhindert. Eine unterschiedliche Deformation ist nur dann möglich, wenn es keine Kraft im Knoten gibt, welche eine Beschleunigung eines anschließenden Stabes verhindern würde; die Stäbe also nicht kraftschlüssig miteinander verbunden sind. Das Fehlen einer übertragbaren Kraftgröße in einem Knoten ist eine für die Ermittlung der Stabilität und Schnittgrößen signifikante Zusatzbedingung. Die Anzahl der Kraftgrößen, welche übertragen werden können, werden gleich wie bei Auflagern als Wertigkeit bezeichnet. Zur Unterscheidung verwendet man jedoch den Ausdruck Knotenwertigkeit. Ebenfalls äquivalent zu Auflagern gibt es auch bei Knoten und Anschlüssen diverse Kombinationen von zu übertragbaren Kraftgrößen. Die Tabelle 4.3 stellt dafür eine Übersicht da.

Feste Anschlüsse welche ums Eck geführt werden (starre Verbindungen zwischen Stäben) werden meistens noch mit einem Vollkreis verstärkt angedeutet (Abb. 4.12), um den Knotentyp verständlicher darzustellen. Weiter besteht noch die Möglichkeit Stäbe auf andere durchlaufende Träger anzuschließen. Dann spricht man von Halbknoten. Sie werden durch eine wahrhaftiges „Anhängen“ des Knotens an den Hauptstab dargestellt. Teilweise (wie beim in Abb. 4.13 dargestellten Halbgelenk) werden dann die Knotensymbole mittig halbiert.

---

<sup>9</sup>Der Gedanke, dass es bei starren Körpern Deformationen geben kann, scheint intuitiv widersprüchlich. Es sei jedoch bemerkt, dass wenn von einer *gleichen* Deformation die Rede ist, diese auch null sein kann. Ist von *unterschiedlichen* Deformation an einem Punkt die Rede, somit ist damit keine herkömmliche Deformation gemeint, sondern eher eine Beschleunigung eines Stabteiles, mangels einer Gegenkraft (z.B. Rotation um Knotenpunkt).

<sup>10</sup>Auch hier ist das freie Ende nur der Vollständigkeit halber angeführt.

Bezeichnung	Symbol	Äquivalentes Auflager	Vorgegeben	Unbekannt	Knotenwertigkeit K
Fester Anschluss			$u_l = u_r$ $w_l = w_r$ $\varphi_l = \varphi_r$	$N$ $Q$ $M$	$K = 3$
Kraftmechanismus	- Längs-		$N = 0$ $w_l = w_r$ $\varphi_l = \varphi_r$	$\Delta u$ $Q$ $M$	$K = 2$
	- Quer-		$u_l = u_r$ $Q = 0$ $\varphi_l = \varphi_r$	$N$ $\Delta w$ $M$	
Gelenk			$u_l = u_r$ $w_l = w_r$ $M = 0$	$N$ $Q$ $\Delta \varphi$	$K = 2$
Rollmechanismus	- Längs-		$N = 0$ $w_l = w_r$ $M = 0$	$\Delta u$ $Q$ $\Delta \varphi$	$K = 1$
	- Quer-		$u_l = u_r$ $Q = 0$ $M = 0$	$N$ $\Delta w$ $\Delta \varphi$	
Freies Ende <sup>10</sup>			$N = 0$ $Q = 0$ $M = 0$	$\Delta u$ $\Delta w$ $\Delta \varphi$	$K = 0$

Tabelle 4.3: Arten von Knoten

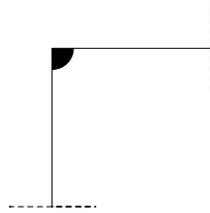


Abbildung 4.12: Fester Anschluss um Eck

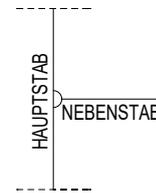


Abbildung 4.13: Darstellung eines Halbgelenks

Schlussendlich sei nochmal ein Wort zur Äquivalenz von Auflagern und Knotenpunkt gesagt, da dies möglicherweise ein schwer zu nachvollziehender Aspekt sein mag:

Sowohl bei Auflager als auch bei Knotenpunkt ist die eigentliche Forderung, dass der Unterschied einer beliebigen Verformungsgröße<sup>11</sup>  $\Delta V$  zwischen den beiden betrachteten Teilen 0 sein muss. Bei einem Auflager kommt jedoch noch die Annahme hinzu, dass das angeschlossene System ideal starr ist, also keine Verformung aufweist. Dadurch ergibt sich zwangsweise, da  $\Delta V$  des Auflagers null ist, dass auch  $\Delta V$  des Stabes null ist. Bei einem Knotenpunkt ist das nicht zwingend. Zwar wurde oben erwähnt, dass auch Stäbe ideal starr angenommen werden, jedoch bezieht sich diese Annahme nur auf den Stabilitäts- und Schnittgrößennachweis. Bei diesen beiden Untersuchungen verhalten sich ein System mit Knotenpunkt oder zwei Systeme mit Auflager/ Last tatsächlich äquivalent. Bei der Berechnung der realen Verformung wird diese Annahme (logischerweise) fallen gelassen, wodurch sich ein Unterschied zwischen diesen beiden Modellen ergibt. Eine Betrachtung mit Knotenpunkt ist also vor allem bei Systemen mit signifikanter Durchbiegung vorzuziehen.

Alternativ kann natürlich auch eine Trennung per Federung erfolgen. Jedoch wird damit kein Arbeitsaufwand gespart. Damit eine Federung die Verformung eines

<sup>11</sup>Die Bezeichnung  $V$  für eine allgemeine Verformungsgröße ist in der Praxis (da nicht notwendig) nicht gebräuchlich und wurde hier nur zur verständlicheren Darstellung des Sachverhaltes verwendet.

weggeschnittenen Tragwerksteil simulieren kann, muss sie die Information über besagten Tragwerksteil beinhalten. Vom Arbeitsaufwand her ist kein Unterschied zwischen einer Betrachtung mit Federung und einer Betrachtung mit Knoten festzustellen.

### 4.2.6 (Zwangs-) Verformungen

Die zweite Art mit der Tragwerke sich beeinflussen können, sind Zwangsverformungen. Verformungen sind Lageänderungen von Punkten. Sind zwei Stäbe miteinander verbunden und verformt sich einer der beiden so, dass es am Anschlusspunkt zu einer Verformung kommt, so muss sich der zweite Stab mitverformen, da sonst beide Seiten des Verbindungspunktes unterschiedliche Lagen im Raum haben, was gleichwertig mit einem Bruch ist. Wird ein Stab zwangsverformt, so spricht man auch von „eingepprägten Verformungen“.

Um die Wirkung von Zwangsverformungen auf Tragwerke zu untersuchen, betrachten wir Abbildung 4.14. In Abbildung 4.14 a sehen wir eine Stütze mit Kragarm an dessen Spitze eine Last angreift. Diese Last führt zu einer Verformung (Lageveränderung) an der Kragarmspitze, welche sich aus einem Anteil  $\delta_S$  aus der Horizontalverschiebung der Stütze, einem Anteil  $\varphi_S$  aus der Krümmung der Stütze und einem Anteil  $\delta_K$  aus der Durchbiegung des Kragarmes zusammensetzt.

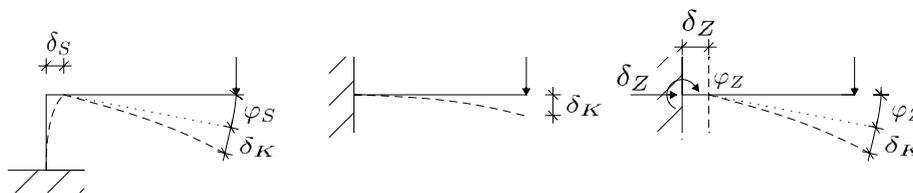


Abb. 4.14 a

Abb. 4.14 b

Abb. 4.14 c

Abbildung 4.14: Vergleich von Gesamtsystem und Teilsystem mit und ohne Zwangsverformung

Wird jetzt der Anschluss zwischen Stütze und Kragarm durch ein eingespanntes Auflager ersetzt, so verschwindet bei der Verformungsberechnung selbstverständlich die Anteile  $\delta_S$  und  $\varphi_S$  der Stütze. Möchte man jedoch die Verformungen sehr wohl berücksichtigen (um z.B. eine genau Durchbiegung vom unbelasteten Stab zu erlangen), so kann dies durch Zwangsverformungen gemacht werden. Dies ist in Abbildung 4.14 c dargestellt.

Realistisch betrachtet hat die Modellierung der totalen Verformung in Abbildung 4.14 c durch Zwangsverformungen einige Fehler. Zum einen setzt es voraus, dass die Verformung der Stütze aufgrund der Last bekannt ist. Dies darf jedoch bezweifelt werden, wenn nicht einmal die Verformung des Kragarmes bekannt ist. Würde man also tatsächlich eine absolute Verformung berechnen wollen, so würde man einfach das Gesamtsystem betrachten oder die Stütze mit einer Feder modellieren.

Beispiel 4.14 zeigt jedoch sehr gut den Sinn von Zwangsverformungen auf: Berücksichtigung von Verformungen, welche nicht im betrachteten System selbst entstehen, jedoch für das System von Bedeutung sind. Ein praktisches Beispiel hierfür wäre die Bodenmechanik, vertreten durch die Fundamentabsenkung.

Da es kein Stabwerks- oder ähnliches Tragwerksmodell für die Verformung des Erdboden gibt, kann er nicht in ein Gesamtsystem integriert werden. Er kann zwar (und wird auch oft) als Feder modelliert werden, jedoch gibt es Fälle, wo es zu Setzungen kommt obwohl keine Mehrlast einwirkt<sup>12</sup>, was bei einer Modellierung als Feder zu keiner Mehrverformung führen würde. In diesem Fall wird die Absenkung durch eine Zwangsverformung als ein von einem Geomechaniker berechneten Pauschalwert eingerechnet. Dies tut man, um zu sehen wie das restliche Tragwerk auf eine Mehrverformung reagiert.

Das ist notwendig, da es einen fundamentalen Zusammenhang zwischen Las-

---

<sup>12</sup>Z.B. Aufweichung des Bodens durch Grundwasseranstieg oder Setzung durch Extralast durch ein Nachbargebäude

ten und Verformungen gibt: Jede Last führt zu einer Verformung. Dies bedeutet jedoch auch, dass immer statt einer Zwangsverformung eine Last angesetzt werden kann, welche das Tragwerk gleich verformt, wie es die Zwangsverformung tun würde.

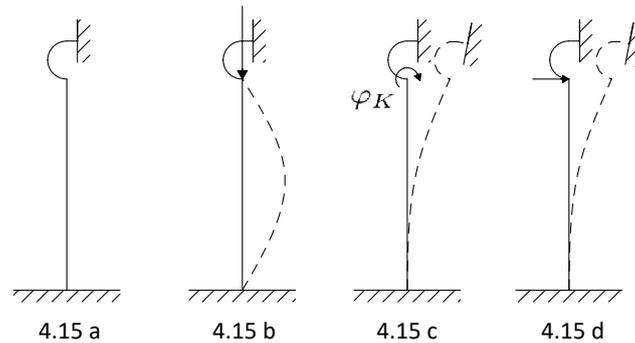


Abbildung 4.15: Äquivalenz von Zwangsverformung und Last

Dafür betrachten wir Abbildung 4.15, welche die Stütze aus Abbildung 4.14 darstellt. Sie wurde per Drehfeder<sup>13</sup> von dem Kragarm isoliert. Würde man die Stütze so betrachten, wie sie in Abbildung 4.15 a dargestellt ist (also ohne eine Last), dann würde es nachvollziehbarerweise zu keiner Verformung kommen. Dies entspricht natürlich nicht der Realität, womit dieses Modell falsch sein muss. Auch das Neuansetzen der Last bringt nicht die gewünschte Verformung, da so die Stütze lediglich gedrückt aber nicht verkrümmt wird.

Erst wenn am Punkt der Feder eine Zwangsverformung gemäß der Verformung des Kragarmes angebracht wird, erhält man das gewünschte Resultat. Jedoch kann das selbe Resultat auch durch das Ansetzen einer äquivalenten Last<sup>14</sup> erreicht werden, wie in Abbildung 4.15 d gezeigt wird.

Da Zwangsverformungen selten vorkommen, gibt es kein eigenes konventionelles

<sup>13</sup>Die Darstellung per Drehfeder ist nicht akkurat, da ein fester Anschluss durch eine Drehfeder und zwei Dehnfedern in beide Orientierungen dargestellt werden müsste. Der Übersichtlichkeit wurde jedoch darauf verzichtet.

<sup>14</sup>Das Ersetzen einer Zwangsverformung durch eine äquivalente Last wird oft vorgezogen, da es den mathematischen Arbeitsaufwand deutlich verringert.

Symbol für sie. Wenn notwendig werden sie daher einfach durch (gekrümmte) Pfeile dargestellt und mit dem Symbol  $\delta$  für Verschiebung und  $\varphi$  für Verdrehung gekennzeichnet. Optional können Verdrehungen jedoch auch als Winkel dargestellt werden.

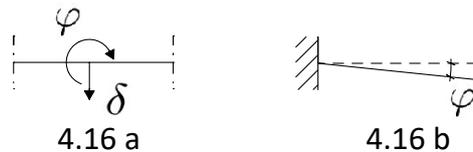


Abbildung 4.16: Darstellung von Zwangsverformungen

### 4.2.7 Federhafte Knoten

Zum Abschluss der Tragwerksbestandteile sei noch etwas zu federhaften Knotenpunkten gesagt:

Genauso wie bei Auflagern, gibt es natürlich auch keine Knotenpunkte, welche ideal starr sind. Trotzdem sind meistens die Verformungen klein genug, um komplett ignoriert zu werden. Manchmal ist es jedoch notwendig (wenn nicht sogar gewollt) Verformungen von Knoten mitzuberücksichtigen. Dann spricht man von federhaften Knotenpunkten.

Ihre Funktion ist gleich jener in 1.2.4 vorgestellten Federungen. Die Annahme dass  $V_l = V_r$  trifft dann nur zu, wenn die damit korrespondierende Kraftgröße 0 ist. Nimmt die Kraftgröße zu, so nimmt auch die Verformung  $\Delta V$  am Knoten gemäß den Formeln  $\delta = \frac{F}{c_N}$  bzw.  $\varphi = \frac{M}{c_M}$  zu.

In Vorrassicht der Gefahr für Missverständnisse sei hier angemerkt, dass sich das in diesem Abschnitt diskutierte  $\Delta V$  fundamental von jenem bei der Diskussion der Knoten unterscheidet. Das  $\Delta V$  der idealisierten Knoten ist eine komplette Freiheit der Deformationen am betrachteten Punkt, wo sich jedes mögliche  $\Delta V$  einstellen kann. Das bei den Federn beschriebene  $\Delta V$  ist eine gezwungene Auslenkung des Punktes aus seiner kräftefreien Lage und ist den Gesetzen

der Feder unterworfen. Es ist also nicht Charakteristikum eines Freiheitsgrades, sondern eines Zwanges. Wir werden es daher (zwecks Unterscheidbarkeit) als eingeschränktes oder erzwungenes  $\Delta V$  bezeichnen.

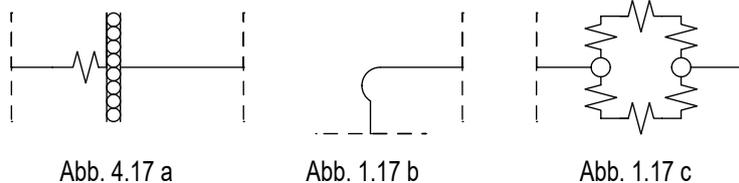


Abbildung 4.17: Beispiele für federhafte Knoten

Äquivalent wie die Funktion erfolgt auch die Darstellung mit der Symbolik der in 1.2.4 vorgestellten Federungen. Ihnen wird jedoch zur Klarstellung des Knotentypus das Symbol des Knotens vorangestellt. In Abb. 4.17 a ist dazu als Beispiel ein federhafter Rollmechanismus angeführt. Das Symbol des Rollmechanismus zeigt, dass nur die Normalkraft  $N$  übertragen werden kann. Die Federung entlang des Stabes bedeutet, dass die mit der Normalkraft  $N$  einhergehende eingeschränkte Verformung  $\Delta u$  gemäß dem Gesetz einer Feder zunimmt. Während  $\Delta u$  nur eingeschränkt anwachsen kann, gibt es für die anderen beiden Verformungen  $\Delta w$  und  $\Delta \varphi$  keine Einschränkung, sie sind also tatsächliche Freiheitsgrade.

Abb. 4.17 b ist ein fester Anschluss, welcher alle Kraftgrößen übertragen kann. Zusätzlich ist er jedoch noch als Dehnfeder ausgeführt, wodurch sich eine erzwungene Verdrehung  $\Delta \varphi$  ausbilden kann. Die beiden Verschiebungsgrößen  $u$  und  $w$  werden starr übertragen, für sie gilt das Gesetz  $\Delta V_l = \Delta V_r$  genau.

Der Knoten in Abb. 4.17 c ist primär ein Gelenk, überträgt also keine Momente, dafür kann es eine uneingeschränkte Verdrehung geben. Zusätzlich sind aber noch Federn in beide Verschiebungsrichtungen angeordnet, wodurch die Forderung  $\Delta V_l = \Delta V_r$  nicht mehr gilt und sich ein eingeschränktes  $\Delta V$  für beide Verschiebungen ausbilden kann. Die komplizierte Darstellung mit zwei Kreisen und sechs Federn folgt der alleinigen geometrischen Symmetrie, um keine der

beiden Seiten auszuzeichnen.

Aus dieser komplizierten Darstellung (mangels konventioneller Alternative) erkennt man, dass der Fall eines federhaften Knotenpunktes äußerst selten vorkommt. Deshalb, aber auch da es (äquivalent zu den Überlegungen zu Auflagern und Federn) für die Gleichgewichts- und Schnittgrößenüberlegung keinen Unterschied macht, ob man einen Knoten oder einen federhaften Knoten betrachtet, werden wir federhafte Knoten erst einmal vernachlässigen und erst wieder bei den Überlegungen zu Verformungen darauf zurückkommen. Allerdings wollen wir es uns nicht nehmen lassen hier nun einen guten Überblick über alle Stabverbindungen zu geben:

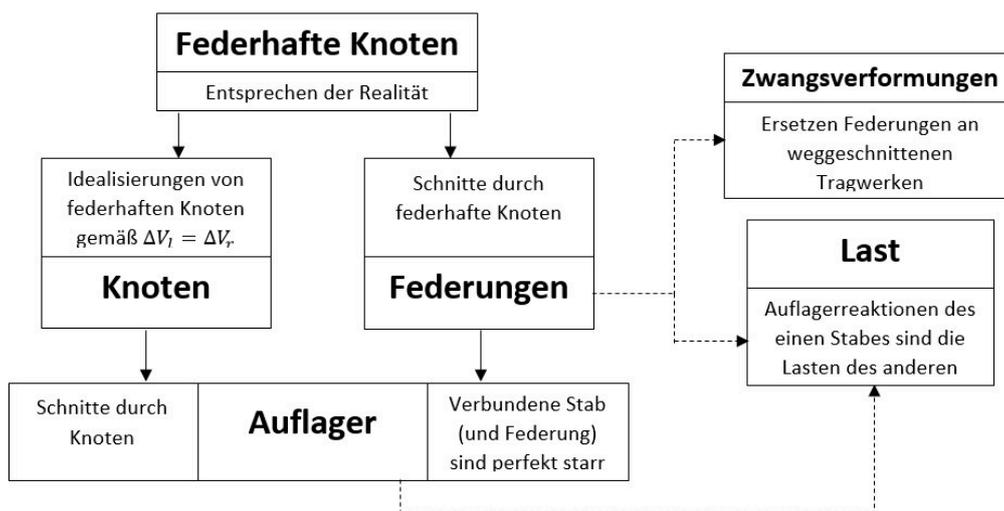


Abbildung 4.18: Übersicht und Zusammenhang der Stabverbindungen

## 4.3 Gleichgewicht eines Tragwerks

### 4.3.1 Definition des Gleichgewicht

In Kapitel 2.5 wurde schon auf die mechanische Definition des Gleichgewichtes eingegangen und in Kapitel 3.1 wurde seine Bedeutung in der Tragwerkslehre

noch etwas laienhaft umschrieben, nun jedoch werden wir uns mit seiner genauen Bedeutung auseinandersetzen.

Unter Gleichgewicht versteht man in der Tragwerkslehre das Vermögen eines Tragwerkes Lasten (bzw. Kraftgrößen) aufnehmen zu können, ohne dabei zu beschleunigen. Eine Beschleunigung tritt dann ein, wenn eine Bewegung des Tragwerkes (oder eines Tragwerkteiles) als Ganzes eintritt.

Da dieses Konzept in der Tragwerkslehre essentiell ist werden wir uns im Folgenden darum bemühen eine Intuition dafür zu entwickeln. Zuvor müssen jedoch noch zwei Konzepte bzw. Begriffe definiert werden, dessen Bedeutungen in den weiteren Ausführungen unabdingbar ist.

#### 1. Starrheit

Es wurde schon mehrmals erwähnt, dass bei Gleichgewichtsüberlegungen die absolute Starrheit des Tragwerkes angenommen wird. Die Überlegung dahinter ist, dass unter einer solchen Annahme jede Art von Deformationen verschwindet und somit die einzelnen Stäbe die kleinsten Einheiten sind, die man zu betrachten braucht. Das ist genau das, was bei Gleichgewichtsüberlegungen relevant ist.

Um absolute Starrheit zu erreichen werden Federungen durch Auflager und federhafte Knoten durch einfache Knoten ersetzt. Dies ist genau deswegen möglich, da die einzigen relevanten Informationen solcher, die Wertigkeit  $W$  und die Knotenbedingungen  $K$  sind. Solange diese übereinstimmen, sieht man bei Gleichgewichtsüberlegungen keinen Unterschied. Dass dies tatsächlich der Fall ist, wird später noch genau gezeigt.

#### 2. Gestalt

Die Gestalt ist ein für die Diskussion des Gleichgewichts unbedingt notwendiger Begriff, da er den Charakter des Gleichgewichts exakt erfasst.

Die Gestalt eines Tragwerkes bezeichnet seinen strukturellen Aufbau bzw. die planmäßige Lage aller Einzelteile und ihre Verbindungen. Sie beschreibt also das Tragwerk ganz allgemein, ohne auf Beanspruchungserscheinungen wie Verformungen einzugehen.

Eine Gestaltänderung ist demnach eine Verschiebung/ Verdrehung einzelner Tragwerksteile (der Stäbe) gegeneinander. Eine solche ist in der Abbildung 4.19 im Beispiel einer Rotation um ein Gelenk dargestellt. In diesem Kontext erkennt man wie wichtig es war die einzelnen Stäbe (dank perfekter Starrheit) als unzerteilbare Individualobjekte zu betrachten.

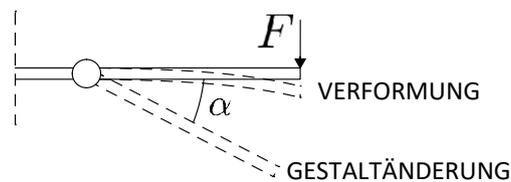


Abbildung 4.19: Unterschied zwischen Gestaltänderung und Verformung

Mit diesen beiden Begriffen lässt sich nun das Gleichgewicht genau untersuchen. Ein Tragwerk ist genau dann im Gleichgewicht, wenn sich unter einer beliebigen Kraftgrößeneinwirkung seine Gestalt nicht ändern kann. Wenn jede erdenkbare Kraftgröße mit jeder beliebigen Orientierung an jedem beliebigen Punkt einwirken kann ohne dass ein Tragwerksteil in Bewegung gerät, so ist dies gleichwertig mit der Formulierung, dass alle Lasten aufgenommen und abgeleitet werden können. In Beispiel 4.20 a ist ein Träger auf zwei Auflagern dargestellt, welche beide bewegliche Gelenklager in vertikaler Richtung sind. Es fällt leicht zu erkennen, dass beim Einwirken einer horizontalen Kraft  $F$  der Stab horizontal beschleunigt, da kein Auflager eine Gegenkraft aufbringen kann.

Im Gegensatz dazu ist in Abb. 4.20 b ein Träger im Gleichgewicht<sup>15</sup> dargestellt.

<sup>15</sup>Die Formulierung im Gleichgewicht, mag etwas seltsam anmuten. Ist von „im Gleichgewicht“ die Rede, so meint man damit „ist unter jeder erdenkbar Einwirkung im Gleichgewicht“.

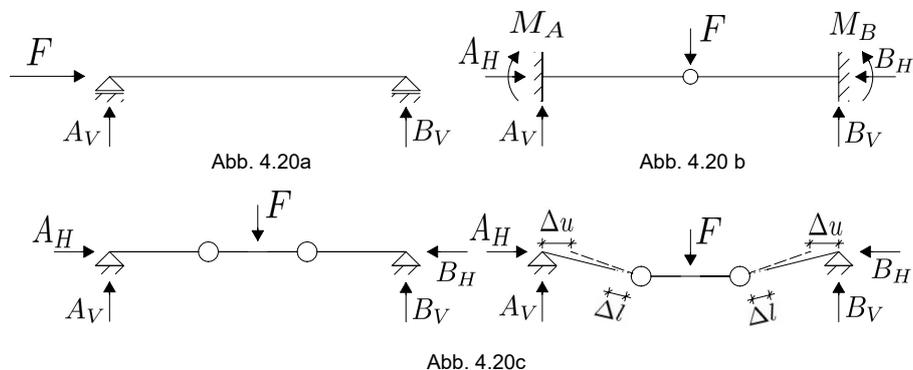


Abbildung 4.20: Veranschaulichung des Konzeptes Gleichgewicht anhand Beispielen

Auch wenn eine Verdrehung am Gelenk möglich ist, kann sie nicht stattfinden, da sie auch zu einer Verdrehung in einem der beiden Auflager führen müsste, was definitionsgemäß bei einem eingespannten Auflager unmöglich ist. Anders formuliert kann das von der Kraft  $F$  verursachte Moment von den Momenten  $M_A$  und  $M_B$  aufgenommen werden.

Noch kontraintuitiv ist das Tragwerk in 4.20 c. Man sieht zwei feste Gelenklager, welche drei durch zwei Gelenke verbundene Stäbe halten. Lässt man nun eine Kraft im mittleren Stab einwirken, so würde man meinen, dass es zu einer Verdrehung wie in 4.20 c kommen sollte. Jedoch benötigt dies eine Verlängerung beider Stäbe und da  $l = l'$  wegen der Forderung nach absoluter Starrheit gelten muss, wäre so eine Gestaltänderung nur als eine Superposition von Verdrehung  $\Delta\varphi$  und Verschiebung  $\Delta u$  erreichbar. Besagte Verschiebung ist allerdings nicht zugelassen, wodurch sich auch so eine Gestaltänderung nicht ausbilden kann. Das System ist also im Gleichgewicht.

Wir erkennen schon, dass der Nachweis des Gleichgewichts eines Tragwerkes oft nicht auf den ersten Blick machbar ist. Wir werden uns also, nachdem wir nun eine Intuition für das Konzept Gleichgewicht entwickelt haben, mit seinem Nachweis beschäftigen.

### 4.3.2 Nachweis des Gleichgewichts

Der Nachweis des Gleichgewichts erfolgt auf drei Ebenen: Der lokalen, der globalen und der äußeren. Das globale Gleichgewicht ist dann erreicht, wenn das Tragwerk als Ganzes seine Lage im Raum nicht ändern kann. Es ist also dann erreicht, wenn die Auflagersituation ausreichend ausgeführt ist bzw. ausreichend viele Auflager vorhanden sind. Im Gegensatz dazu spricht man vom lokalen Gleichgewicht, wenn sich die relative Lage der einzelnen Tragwerksteile zueinander nicht ändern kann. Es beschreibt die Absicherung der einzelnen Stäbe.

Zusätzlich dazu gibt es auch noch das äußere Gleichgewicht. Es ist dann erreicht, wenn die Auflager ihre Beanspruchung aufnehmen können. Dies ist essenziell, wenn man bedenkt, dass (gegen das idealisierte Modell der Tragwerkslehre) Auflager nur Simulationen von äußeren Einflüssen sind, welche nicht unbeschränkt viel Last ableiten können. Das äußere Gleichgewicht weist also nach, dass Auflager ihrer Last gerecht werden.

Obwohl der Nachweis des äußeren Gleichgewichtes nicht Bestandteil der Tragwerkslehre ist (sondern anderer Fachbereiche wie Bodenmechanik oder Betonbau) so seien hier doch die Aufgabenstellung und die Methodik dieses Nachweises angeführt.

#### Äußeres Gleichgewicht

Je nach Art und Umgebung des betrachteten Auflagers sind unzählige, verschiedene Nachweise<sup>16</sup> von den unterschiedlichsten Disziplinen zu führen. Für die Tragwerkslehre sind hiervon nur zwei interessant:

- Nachweis gegen Kippen
- Nachweis gegen Gleiten

---

<sup>16</sup>z.B. Nachweis gegen Aufschwimmen (Bodenmechanik), Nachweis gegen Grundbruch (Bodenmechanik), Nachweis der Verankerung (Betonbau), Nachweis des Anschlusses (u.a. Stahlbau)

All diese (und viele weitere) Nachweise unterliegen dabei der Form

$$E_{stb} \geq E_{dst} \quad \text{bzw.} \quad E_{dst} \leq E_{dst,max}. \quad (4.8)$$

Es ist nachzuweisen, dass die destabilisierende Größe  $E_{dst}$  kleiner ist als die stabilisierende Größe  $E_{stb}$  bzw. die maximal aufnehmbare destabilisierende Größe  $E_{dst,max}$ , wobei gilt

$$E_{stb} = E_{dst,max}. \quad (4.9)$$

Nach diesem Schema werden wir die oben aufgezählten Nachweise kurz anreisen und untersuchen:

#### 1. Nachweis gegen Kippen

Unter Umkippen versteht man die Rotation des Tragwerks als Ganzes unter Beibehaltung seiner Gestalt um einen beliebigen Punkt, welcher an der Tragwerksaußenkante (seiner Umhüllenden) liegen muss. In diesem Kontext ist nachzuweisen, dass das Drehmoment  $M_{stb,A}$  größer ist als das Drehmoment  $M_{dst,A}$ , wobei  $A$  jener Punkt ist um den das Kippen nachgewiesen wird.

$$M_{stb,A} \geq M_{dst,A} \quad (4.10)$$

Der Ursprung und die Größe dieser Momente ist dem Kontext des spezifischen Problems zu entnehmen.

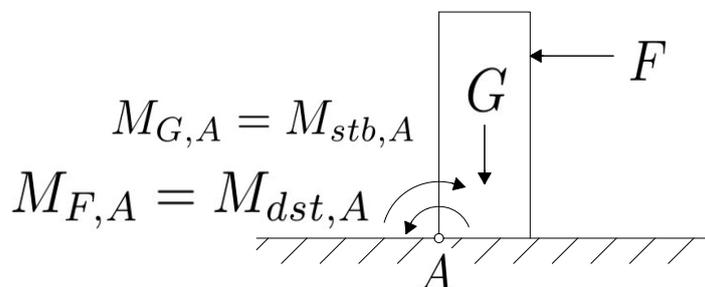


Abbildung 4.21: Kippen

## 2. Nachweis gegen Gleiten

Als Gleiten bezeichnet man eine Translation des Tragwerkes als Ganzes unter Beibehaltung seiner Gestalt, speziell entlang der Oberfläche auf welcher die Auflager des Tragwerkes vormals geruht haben. Hier ist nachzuweisen, dass die beschleunigende Kraft  $F_B$  kleiner ist, als die Reibungskraft  $F_R$ .

$$F_R \geq F_B \quad (4.11)$$

Auch hier ist Ursprung und Größe der Kräfte dem fallspezifischen Kontext zu entnehmen, meistens hat jedoch die Reibungskraft die Form

$$F_R = \mu_H \cdot F_N. \quad (4.12)$$

In dieser Formel ist

- $F_N$  die Kraft die normal auf die betrachtete Fläche wirkt.
- $\mu_H$  der Haftreibungskoeffizient, welcher zwischen den beiden Oberflächen wirkt. Er ist materialspezifisch.

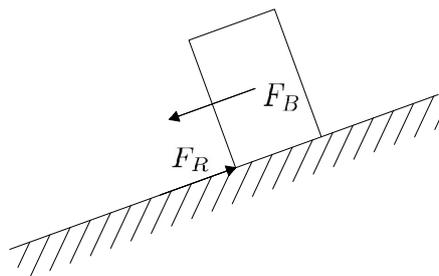


Abbildung 4.22: Gleiten

### Globales Gleichgewicht

Auch beim globalen Gleichgewicht wird eine Gesamtbewegung des Tragwerkes untersucht. Jedoch wird hier nicht die Beanspruchbarkeit der Auflager nachge-

wiesen, sondern deren ausreichendes Vorhandensein. Beim Nachweis des globalen Gleichgewichts wird vorweg angenommen, dass alle Auflager im Stande sind, die von ihnen geforderte Belastung aufzunehmen. Dann wird untersucht, ob auch wirklich genug Auflager vorhanden sind, um alle Freiheitsgrade zu unterbinden. Es war schon erkennbar, dass das Prinzip des Gleichgewichts eng mit dem des Freiheitsgrades zusammenhängt. Ein Tragwerk ist dann im Gleichgewicht, wenn keiner seiner Bestandteile mehr Freiheitsgrade aufweist. Es ist also nachzuweisen, dass die Anzahl der denkbaren Freiheitsgrade aller Tragwerksteile kleiner ist, als die Anzahl der bewegungsunterbindenden Randbedingungen (Auflagerreaktionen).

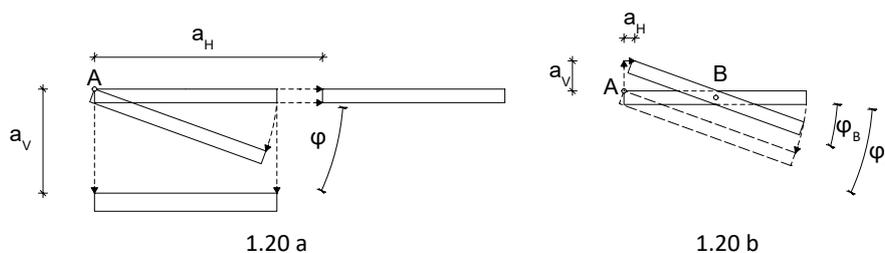


Abbildung 4.23: Die drei Freiheitsgrade des ebenen Falles

Aus Abb. 4.23 a geht hervor, dass ein einzelner Stab (im ebenen Fall) drei Freiheitsgrade aufweist:

- Vertikale Beschleunigung
- Horizontale Beschleunigung
- Rotation um den Punkt A (welcher aus Symmetriegründen beliebig wählbar ist)

Jeder weiterer Fall, wie die in Abb. 4.23 b dargestellte Rotation um den Punkte B, kann dann als Superposition der oben benannten Fälle verstanden werden.

Wir erkennen, dass ein Stab dann im Gleichgewicht ist, wenn es für jeden Freiheitsgrad eine Auflagerreaktion gibt, welche diesen unterbindet. Ist die Anzahl

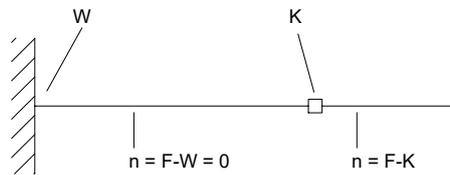


Abbildung 4.24: Veranschaulichung der des Einflusses Knotenwertigkeit auf Gleichgewichtsüberlegungen

der Auflagerreaktionen mit der Wertigkeit  $W$  bezeichnet, so muss gelten:

$$W \geq 3 \quad \text{bzw.} \quad W - 3 \geq 0. \quad (4.13)$$

Gibt es mehrere Stäbe und Auflager so wird daraus

$$\sum_i W_i - 3n \geq 0, \quad (4.14)$$

wobei  $i$  die Anzahl der Auflager und  $n$  die Anzahl der Stäbe ist.

Nun muss man noch den Einfluss von Knoten berücksichtigen. Dafür stellen wir uns einen, wie Abb. 4.24, vollkommen freiheitsbeschränkten Stab vor. Wir schließen nun einen weiteren Stab mithilfe eines beliebigen Knotens mit einer beliebigen Wertigkeit  $K$  an. Das in der Darstellung gewählte Symbol repräsentiert einen beliebigen Knoten. Jene Freiheitsgrade, welche von  $K$  charakterisiert (eingeschränkt) werden, sind per Definition des Knotens nun auch beim angefügten Stab beschränkt. Nur jene Kraftgrößen, welche vom Knoten nicht weitergeleitet werden, bilden tatsächliche Freiheitsgrade. Die Anzahl der dazugewonnen Freiheitsgrade zeigt sich im ebenen Fall also mit  $3 - K$ . Generalisiert man das auf eine beliebige Anzahl von Knoten, welche  $n$  viele Stäbe verbinden so ergibt sich  $3n - \sum_j K_j$ , was eingesetzt in die Formel 4.14

$$\sum_i W_i + \sum_j K_j - 3n \geq 0 \quad (4.15)$$

ergibt. Schlussendlich lässt sich als eine letzte Verallgemeinerung die Anzahl der Freiheitsgrade für eine beliebige Anzahl an Dimensionen generalisieren. Wir erhalten die endgültige Formel, um das Gleichgewicht eines Tragwerks nachzuweisen:

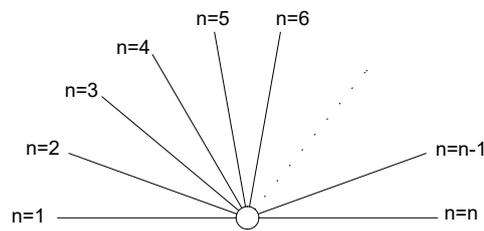
$$\sum_i W_i + \sum_j K_j - F \cdot n \geq 0 \quad (4.16)$$

Hierbei ist

- $W$  die Auflagerwertigkeit eines Auflagers.
- $i$  die Anzahl aller Auflagers.
- $K$  die Knotenwertigkeit eines Knotens.
- $j$  die Anzahl aller Knoten.
- $F$  die Anzahl der möglichen Freiheitsgrade.
- $n$  die Anzahl der Stäbe.

Ist dieser Nachweis erfüllt, so ist ein Tragwerk im Gleichgewicht. Ist er nicht erfüllt, so spricht man von einem kinematischen Tragwerk. Es ist nicht im Gleichgewicht; es gibt eine Belastungssituationen in denen eine Gestaltänderung auftritt.

Ob man feste Anschlüsse in dieser Berechnung berücksichtigt ist irrelevant. Bei zwei (od-er mehr) Stäben, welche mit einem festen Anschluss verbunden sind, macht es keinen Unterschied, ob man sie tatsächlich als zwei Stäbe mit einem Knoten in die Berechnung miteinbezieht oder sie als einen Stab sieht und den



Knoten vernachlässigt, wie folgende Rechnung verdeutlicht:

$$\begin{array}{llll}
 n = 2 & K = F^{17} & j = 1 & 1F - 2F = -F \\
 n = 2 & K = F & j = 0 & 0F - 1F = -F
 \end{array}$$

Weiter ist der Fall zu beachten, dass mehr als ein Stab an einem Punkt verbunden ist. Solch ein Anschluss wird zwar als ein einziger Knoten dargestellt, er wird aber wie eine Superposition von vielen Knoten berechnet. Ein Knoten, in dem  $n$  Stäbe zusammenlaufen wird als  $j = n - 1$  Knoten betrachtet.  $K_j$  ergibt sich dann als  $K_{j,0} \cdot (n_j - 1)$ , wenn  $K_{j,0}$  die Knotenwertigkeit des Knotens  $j$  bezeichnet, wenn nur zwei Stäbe anschließen würden und  $n_j$  die Anzahl der Stäbe, welche am Knoten  $j$  tatsächlich verbunden sind.

Zu allerletzt ist noch der Begriff des „Grades der statischen Bestimmtheit“ wichtig. Er wird mit dem Zeichen  $b$  bezeichnet und ist definiert als:

$$b = \sum_i W_i + \sum_j K_j - F \cdot n \quad (4.17)$$

Nun ist man in der Lage drei Fälle zu unterscheiden, welche uns dann vor allem bei der Bestimmung der Auflagerreaktionen wieder begegnen werden.

<sup>17</sup>Ein fester Anschluss ist dadurch definiert, dass er zu jedem verfügbaren Freiheitsgrad eine korrespondierende Kraftgröße überträgt. Die Wertigkeit  $K = 3$ , wie in Tabelle 4.1 angeführt, ergibt sich für den ebenen Fall.

- $b < 0$  „kinematisch“ Das Tragwerk ist nicht im Gleichgewicht.
- $b = 0$  „statisch bestimmt“ Die Auflagerreaktionen lassen sich allein aus den Gleichgewichtsbedingungen berechnen.
- $b > 0$  „statisch unbestimmt“ Die Auflagerreaktionen lassen sich nicht mehr aus den Gleichgewichtsbedingungen berechnen. Man benötigt weitere Bedingungen (Verformungsbedingungen).

### Lokales Gleichgewicht

Die Bestimmung des lokalen Gleichgewichts fußt ebenfalls auf dem Prinzip der unterbundenen Freiheitsgrade. Sie ist daher ident mit der oben angeführten Berechnungsmethode, nur auf mikroskopischem Niveau.

Während beim Nachweis des globalen Gleichgewichts das gesamte Tragwerk untersucht wird, wird beim Nachweis des lokalen Gleichgewichts immer nur ein Teil des Tragwerks untersucht. Dieser Teil wird dann gedanklich herausgeschnitten; es wird also ein Schnitt durchgeführt. Die sich in diesem Schnitt befindlichen Knoten werden durch Auflager gleicher Wertigkeit ersetzt. Nun wird an diesem Teilsystem der Nachweis des Gleichgewichts nach der oben angeführten Formel geführt. Ein System ist dann im lokalen Gleichgewicht, wenn jeder beliebige Schnitt, den man durch ein Tragwerk setzen könnte, im Gleichgewicht ist.

Ein Tragwerk besteht in der Regel jedoch aus sehr vielen (und wenn man Schnitt-

---

<sup>18</sup>Wird der Schnitt durch einen Stab geführt, so ist ein eingespanntes Auflager einzusetzen, da jeder Punkt in einem Stab als ein fester Anschluss gesehen werden kann, wie die schon geführte Äquivalenzbetrachtung von Stab und fester Anschluss gezeigt hat.

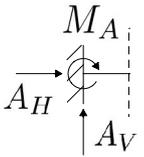
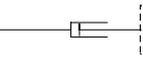
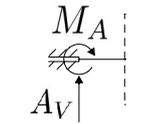
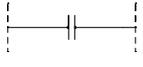
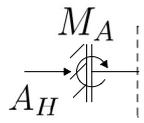
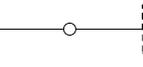
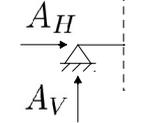
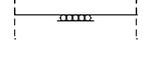
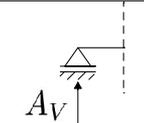
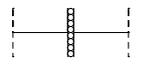
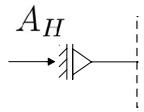
Knoten	Symbol	Auflager	Symbol	$K = W$
Fester Anschluss <sup>18</sup>		Eingespanntes Auflager		3
Längskraftmechanismus		Bewegliche Längseinspannung		2
Querkraftmechanismus		Bewegliche Quereinspannung		2
Gelenk		Festes Gelenklager		2
Längsrollmechanismus		Horizontallager		1
Querrollmechanismus		Vertikallager		1

Tabelle 4.4: Knoten und ihr äquivalenten Auflager

te durch Stäbe zulässt unendlich vielen) möglichen Schnittpunkten. Um solche unverhältnismäßige Nachweise zu verkürzen wurden „relative Gleichgewichtsregeln“ aufgestellt, welche, wenn sie erfüllt sind, das lokale Gleichgewicht garantieren. Der Name „relative Gleichgewichtsregeln“ leitet sich aus der Gegebenheit ab, dass diese Regeln nur die relative Verformungssicherheit der Tragwerksteile zueinander sichern, nicht jedoch die absolute Verschiebungs- oder Verdrehungsinvarianz des gesamten Tragwerkes im Raum.

Bevor die eigentlichen Regeln aufgeführt werden, so sei noch etwas zur prinzipiellen Natur der Gleichgewichtsregeln gesagt. Die nun folgenden Gleichgewichtsregeln sind keine sich ergänzenden Gesetze, wessen Erfüllung für jede einzelne Regel nachgewiesen werden muss. Eher sind sie unterschiedliche Fassungen desselben Prinzips, welches das innere Gleichgewicht garantiert. Dementsprechend genügt es eine dieser Regeln nachzuweisen, da alle anderen, da äquivalent, dann auch erfüllt sind.

- Stabkettenregel

„Alle Knotenpunkte einer geschlossenen Stabkette dürfen zusammen genau 3 Freiheitsgrade zulassen, damit die Stäbe relativ zueinander starr sind.“

Eine geschlossene Stabkette ist eine Aneinanderreihung von Stäben, so dass

1. jeder Stab immer nur mit 2 anderen Stäben verbunden ist.
2. es keine freien Enden gibt.

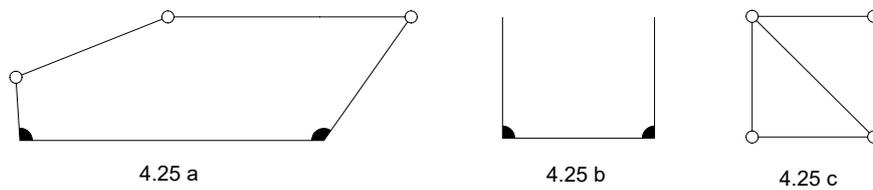


Abbildung 4.25: Beispiele für Stabketten

In Abb. 4.25 sind dafür Beispiele aufgelistet. Beispiel a ist eine geschlossene Stabkette. Beispiel b nicht, da die Stabkette nicht geschlossen ist; es gibt also Stäbe mit freien Enden. Beispiel c ist ebenfalls keine geschlossene Stabkette, da es Knoten gibt, an denen mehr als zwei Stäbe verbunden sind. Jedoch könnte man das System in c in zwei unabhängige Stabketten zerlegen.

Auch sei hier noch einmal auf die Bedeutung von „relativ starr“ hingewiesen. Zwei oder mehr Stäbe sind dann relativ starr zueinander, wenn sie sich nicht gegeneinander bewegen können, also ihre Abstände und Verdrehungswinkel immer gleich bleiben.

Mit diesem Wissen können wir jetzt die Stabkettenregel anhand einiger Beispiele näher untersuchen.

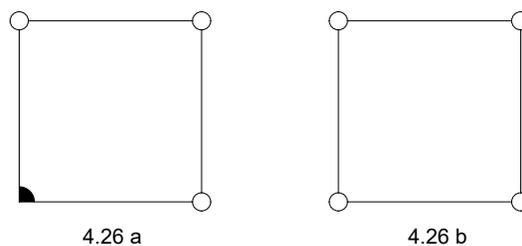


Abbildung 4.26: Beispiele zur Untersuchung der Stabkettenregel

Das System in 4.26 a ist demnach lokal im Gleichgewicht, da jedes Gelenk nur einen Freiheitsgrad zulässt. Das System in 4.26 b dagegen ist nicht im

lokalen Gleichgewicht, da es vier Gelenke hat, welche vier Freiheitsgrade zulassen, was gegen die oben genannte Regel verstößt.

Aus der Stabkettenregel lassen sich weniger allgemeine, dafür praktisch gebräuchlichere Regeln anwenden. Im Folgenden werden aus deren Unzahl die wichtigsten kurz angesprochen:

- Gelenkstabkettenregel

„Eine aus  $n$  Stäben bestehende Stabkette, wessen Stäbe ausschließlich mit Gelenken<sup>19</sup> verbunden sind, benötigt  $n - 3$  feste Anschlüsse, um relativ starr zu sein.“

Bzw.

„Eine Stabkette darf neben festen Anschlüssen maximal drei Gelenke haben um relativ starr zu sein.“

- Dreiecksregel

„In einem statischen System, dessen Stäbe nur durch Gelenke verbunden sind<sup>20</sup>, ist eine Ausführung aus Dreiecken, die einzig relativ starre.“

- 1. Bildungsgesetz von Fachwerken

„Will man einen relativ starren Körper, welcher nur mit Gelenken verbunden ist, um ein Gelenk erweitern, so benötigt man dazu mindestens zwei Stäbe, welche beide das alte System mit den neuen Knoten verbinden müssen und nicht auf einer Linie liegen dürfen.“

- 2. Bildungsgesetz von Fachwerken

---

<sup>19</sup>Die meisten Regeln beschränken sich auf Gelenke, da dass die bei weitem häufigste Verbindungsart in der Anwendung ist.

<sup>20</sup>Wir werden so ein System später als Fachwerk kennen lernen

„Zwei statisch stabile Tragwerke, wessen Stäbe nur mit Gelenken verbunden sind, benötigen mindestens drei Stäbe um miteinander verbunden zu werden, wobei diese Stäbe sich weder in einen Punkt schneiden, noch parallel sein dürfen.“

Es ist leicht ersichtlich, dass all diese Regeln gleichwertig zueinander bzw. Spezifikationen der Stabkettenregel sind, nicht zuletzt deswegen, weil alle darauf hinauslaufen, dass ein System aus mit Gelenken verbundenen Stäben nur aus Dreiecken aufgebaut werden kann, was eine Konsequenz der Stabkettenregel ist. Zuletzt sei noch eine Mahnung bezüglich dem Ablauf des Nachweises des inneren Gleichgewichts ausgesprochen. Der Satz, dass ein System dann im inneren Gleichgewicht ist, wenn jeder beliebige Schnitt, den man durch ein Tragwerk setzen könnte, im Gleichgewicht ist, ist nicht wörtlich als mathematischer Nachweis umzusetzen. Eher ist es ein Gedankengang, welcher versucht in Worte zu fassen, wie man ein System im innerlichen Gleichgewicht aufbaut und ausführt. Dabei sollen die relativen Gleichgewichtsregeln behilflich sein.

### **Alternative Formen des Gleichgewichtsnachweises**

In anderer Literatur wird zum Nachweis des Gleichgewichts oft die als „Abzählkriterium“ bekannte Formel

$$n = (a + s \cdot p) - (g \cdot k + r) \quad (4.18)$$

angeführt, welche manchmal auch alternativ als

$$n = a + g \cdot (p - k) - r \quad (4.19)$$

geschrieben wird. Formel 4.18 ist eine leicht allgemeinere Form von 4.19, wo zwischen den Variablen  $s$  und  $g$  unterschieden wird. Setzt man in 4.18  $s = g$ , so

lassen sich beide durch einfaches Umformen ineinander überführen.

Wir werden sie kurz diskutieren indem wir uns zuerst mit ihrem Formalismus und ihrer Funktionsweise beschäftigen, um dann ihre Äquivalenz mit der oben hergeleiteten Formel 4.16 zu beweisen.

In der Formel 4.18 steht

- $n$  für den Grad der statischen Bestimmtheit. Wir haben ihn oben als  $b$  bezeichnet.
- $a$  für die Anzahl der möglichen Auflagerreaktionen.  $a$  ist äquivalent zu  $\sum_i W_i$ .
- $s$  für die Anzahl der unabhängigen Schnittgrößen je Stabelement. Was unabhängige Schnittgrößen sind wird später noch genau behandelt, vorerst reicht es zu wissen, dass  $s$  gleich den Freiheitsgraden  $F$  ist.
- $p$  für die Anzahl aller Stabelemente, also nach dem oben eingeführten Formalismus die Anzahl der Stäbe  $s$ .
- $g$  für die Anzahl der Gleichgewichtsbedingungen je Knoten. Auch die Bedeutung von Gleichgewichtsbedingungen wird später noch genau erklärt. Jedoch genügt es auch hier zu wissen, dass die Anzahl der Gleichgewichtsbedingungen immer gleich der Anzahl der Freiheitsgrade  $F$  ist. Dies erklärt dann, warum es ohne Beschränkungen der Allgemeinheit möglich ist  $s = g$  zu setzen und warum die Formeln 4.18 und 4.19 auch wirklich gleichwertig sind.
- $k$  für die Anzahl der Knotenpunkte einschließlich der Auflagerpunkte und freien Enden.  $k$  ist somit die Summe aller Knoten  $j$ , aller Auflager  $i$  und aller freien Enden, welche hier mit  $e$  gekennzeichnet werden. Superpositionen von solchen (z.B. sollten mehrere Stäbe an einem Knoten zusammenlaufen,

oder sollte ein Auflager genau bei einem Knoten angreifen) sind hier nur als ein Knotenpunkt zu zählen.

- $r$  für die Summe der Nebenbedingungen zwischen den Stabelementen. Damit ist die im Abschnitt über Knoten eingeführte Bezeichnung Zusatzbedingungen gemeint, welche formal die Form  $S = 0$  hat, wobei  $S$  eine beliebige Kraftgröße ist. Zusatzbedingung ist der Name für die Information, dass eine Kraftgröße an einem Knoten nicht übertragen werden kann, was sich mathematisch als  $S = 0$  ausdrücken lässt.  $r$  bezeichnet dann die Summe aller Zusatzbedingungen über alle Knoten hinweg. Wie man aus Tab. 4.3 einfach sehen kann, summieren sich für jeden Knoten die Knotenwertigkeit und die Zusatzbedingungen (also die übertragbaren und nicht übertragbaren Kraftgrößen) zu den Freiheitsgraden auf. Die Anzahl der Zusatzbedingungen für einen Knoten ist demnach die Subtraktion seiner Knotenwertigkeit von den Freiheitsgraden. Summiert man nun diese Zusatzbedingungen über alle Knoten so ergibt sich

$$r = \sum_j F - K_j. \quad (4.20)$$

Vorsicht ist jedoch bei Anschlüssen von mehreren Stäben aneinander geboten. Wurde ein Knoten, welcher mehrere Stäbe aneinander bei der Knotenpunktanzahl  $k$  nur einfach berücksichtigt, so gilt dies nicht für die Nebenbedingungen. Ein Knoten, welcher  $n$  Stäbe aneinander anschließt, liefert  $K_0 \cdot (n - 1)$  Nebenbedingungen, wenn  $K_0$  die Wertigkeit des Knotens ist. Der Wahrheitsgehalt dieser Aussage wird dann bei der Diskussion der Auflagerreaktionen bewiesen. Schließen also mehrere Stäbe an einem Knoten

an, so erweitert sich Formel 1.20 auf ihre allgemeingültige Form

$$r = \sum_j F(n_j - 1) - K_j, \quad (4.21)$$

wobei  $n_j$  die Anzahl aller Stäbe  $n$  ist, die an einem beliebigen Knoten  $j$  anschließen. Es sei noch einmal vermerkt, dass sich  $K_j$  als  $K_{0,j} \cdot (n_j - 1)$  ergibt.

Als letzte Anmerkung sei hier noch angebracht, dass es auch bei diesem Formalismus egal ist, ob man zwei per festem Anschluss verbundene Stäbe als zwei Stäbe mit einem Knoten oder als einen durchgehenden Stab sieht. Dies ist leicht ersichtlich wenn man sich den Term  $(p - k)$  vor Augen hält. Es ist nämlich vollkommen irrelevant, ob man  $p$  und  $k$  jeweils um 1 (oder auch um eine beliebige andere Zahl) erhöht, da das die Differenz der beiden nicht verändert.

Da wir uns nun mit dem Formalismus des „Abzählkriteriums“ vertraut gemacht haben, können wir nun dessen Äquivalenz zu 4.16 beweisen. Da sie ja das gleiche Ergebnis liefern müssen, können wir sie gleich setzen und die Variablen nach der Schreibweise von 4.16 aneinander anpassen, mit der Ausnahme, dass  $K$  zugunsten von  $r$  substituiert wird. Die aus 4.18 stammende Variable  $k$  bleibt jedoch erhalten, da es für sie im Formalismus der Formel 4.16 kein ausreichendes Äquivalent gibt.

$$\sum_i W_i + F \cdot (n - k) - r = \sum_i W_i + \sum_j F(n_j - 1) - r_j - Fn \quad (4.22)$$

Neben offensichtlicher Elimination von Variablen können wir den Term  $\sum_j F(n_j - 1) - r_j$  auflösen. Da  $F$  für alle  $j$  eine Konstante ist und die Summe aller  $r_j$   $r$  ist, ergibt sich

$$F \cdot (n - k) - r = F \cdot \sum_j (n_j - 1) - r - Fn \quad (4.23)$$

wodurch sich auch  $r$  eliminieren lässt:

$$F \cdot (n - k) = F \cdot \sum_j (n_j - 1) - Fn \quad (4.24)$$

Durch Elimination von  $F$  und Umformen erhält man schließlich:

$$2n - k - \sum_j (n_j - 1) = 0 \quad (4.25)$$

Wir können uns davon sehr leicht intuitiv überzeugen, indem wir Abb. 4.27 betrachten. Für den Ausgangstab eines Trägers auf zwei Stützen in 4.27 a ist dies offensichtlich wahr. Schließt man einen beliebigen weiteren Träger an, so gleichen sich weiterhin alle Terme aus, da einerseits der Term  $2n$  bei einem Anstieg um  $n + 1$  um insgesamt 2 steigt, dafür aber entweder

- $k$  und  $\sum_j (n_j - 1)$  um jeweils 1, wie in Abb. 4.27 b (wegen einem zusätzlichen Stabende, sowie einem zusätzlichen Knotenanschluss)

oder

- $\sum_j (n_j - 1)$  um 2, wie in Abb. 4.27 c (weil es zwei neue Knotenanschlüsse aber kein neues Stabende gibt).

Damit sei die Allgemeingültigkeit von 4.16 gezeigt und somit dem Beweis genüge getan.

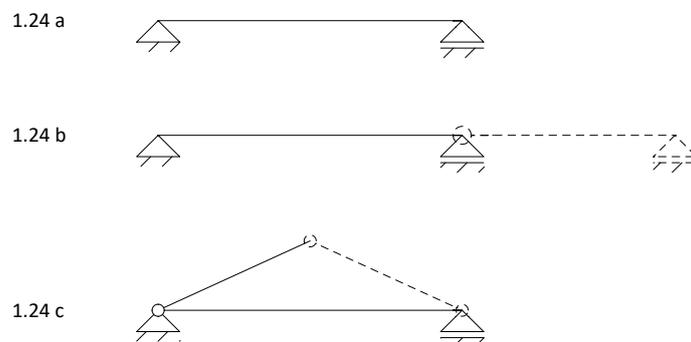


Abbildung 4.27: Skizzen zum Beweis der Gleichheit von 4.16 und 4.18

# Kapitel 5

## Zustandsgrößen und deren Bestimmung

### 5.1 Allgemeines

#### 5.1.1 Zustandsgrößen und Prozessgrößen

Physikalische Größen werden grob in Zustandsgrößen und Prozessgrößen eingeteilt.

Zustandsgrößen bezeichnen jene Größen, welche den Zustand eines Systems beschreiben ohne Informationen zu enthalten, wie es zu diesem Zustand gelangt ist. Beispiele dafür wären Temperatur, Maße, Kräfte und für die Statik wichtig auch Verformungen. Ihnen gegenüber stehen Prozessgrößen, auch Weggrößen genannt, welche die Veränderung von Zuständen beschreiben. In der Statik ist davon nur die Arbeit bedeutend, ein weiteres Beispiel wäre jedoch die Wärme.

Zustands- und Prozessgrößen werden durch Zustandsänderungen verbunden. Da eine Zustandsänderung immer von einer Prozessgröße ausgelöst wird, führt das Auftreten von Prozessgrößen immer zu einer Veränderung von Zustandsgrößen. Umgekehrt kann ein Zustand nur dann erhalten bleiben (d.h. alle Zustandsgrößen

behalten ihren Wert) wenn keine Prozessgröße auftritt bzw. alle Prozessgrößen 0 sind.

### 5.1.2 Überblick über die Zustandsgrößen in der Tragwerkslehre

Die in der Tragwerkslehre betrachteten Zustandsgrößen sind Kraft- und Weggrößen.<sup>1</sup> Unter Kraftgrößen versteht man all jene Kräfte, welche auf das Tragwerk einwirken, sowie jene, welche aufgrund der Einwirkung hervorgerufen werden. Weggrößen sind alle Arten von Verformungen, sowohl äußerlich aufgezwungene, sowie durch Einwirkung entstandene. Weggrößen bezeichnen jedoch nur die zurückgelegten Strecken aufgrund von Veränderungen von Längen und Lagen und nicht die ungeformten Strecken selber.<sup>2</sup>

Für unsere Betrachtungen ist es zweckmäßig zwischen Einwirkungen und Auswirkungen zu unterscheiden. Einwirkungen sind jene gegebenen Anfangsbedingungen, welche von außen auf das Tragwerk einwirken. Damit sind prinzipiell Lasten und Zwangsverformungen gemeint. Auswirkungen dagegen sind alle Größen, welche sich aus den Einwirkungen ergeben und von ihnen abhängen. Insbesondere sind damit Auflagerreaktionen, Schnittgrößen, Verformungen und im weiteren, statischen Sinne dann auch Spannungen gemeint.

Eine ähnliche, wenn auch im Detail unterschiedliche Einteilung ist die Kategorisierung in äußere und innere Größen. Äußere Größen sind alle Größen, die von außen auf ein Tragwerk einwirken, unabhängig von ihrem Ursprung. Innere Größen dagegen, sind jene Größen, welche im Inneren von Tragwerken entstehen, um die äußeren Einwirkungen zu kompensieren bzw. sie weiterzuleiten. Wir werden uns im Laufe dieses Buches dieser zweiten Einteilung bedienen, da sie didaktisch

---

<sup>1</sup>Spannungen, sowie Querschnittskennwerte, welche auch Zustandsgrößen wären sind traditionellerweise Bestandteil der Statik, obwohl natürlich diese Fachgebiete eng kooperieren.

<sup>2</sup>Unverformte Maße wären im ursprünglichen Sinne zwar auch Zustandsgrößen, werden jedoch in unseren Betrachtungen bewusst ausgeklammert.

einige Vorzüge hat, wodurch sich folgende Klassifizierung ergibt:

	Kraftgrößen	Weggrößen
äußere Größen	Lasten, Auflagerreaktionen	Verformungen
innere Größen	Schnittgrößen	Verzerrungen

### 5.1.3 Globales und lokales Koordinatensystem

Konventionellerweise wird bei der Betrachtung von Tragwerken zwischen zwei Koordinatensystemen unterschieden: Global und lokal.

Das globale Koordinatensystem legt den absoluten Ursprung, sowie die absolute Orientierung fest und kodiert das gesamte Tragwerk. Mit ihm werden die Koordinaten von Tragwerksteilen bestimmt, sowie die Orientierung von äußeren Zustandsgrößen festgelegt.

Dementgegen kodiert das lokale Koordinatensystem immer nur einzelne Teile (z.B. Stäbe oder Auflager) des Tragwerkes. Es dient der Beschreibung von Schnittgrößen und Verformungen und ist so angelegt, dass deren Beschreibung möglichst einfach ist. Im Unterschied zum globalen Koordinatensystem, was pro Tragwerk nur einmal existiert, kann es viele verschiedene lokale Koordinatensysteme geben, welche jeweils ihren Tragwerksteilen angepasst sind.

Zur Unterscheidung derer beiden bezeichnet man die Koordinaten des globalen Koordinatensystems mit Großbuchstaben  $(X, Y, Z)$ , während man die Koordinaten des lokalen Koordinatensystems mit Kleinbuchstaben  $(x, y, z)$  kennzeichnet. Sollte es notwendig sein, so werden die lokalen Koordinatensysteme auch noch im Index durchnummeriert, um zwischen ihnen unterscheiden zu können (z.B.  $x_1, x_2, \dots, x_i$ ).

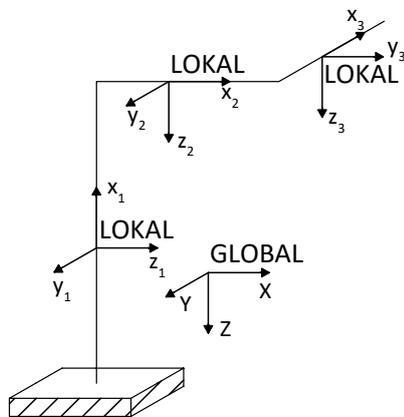


Abbildung 5.1: Gegenüberstellung von globalen und lokalen Koordinatensystemen

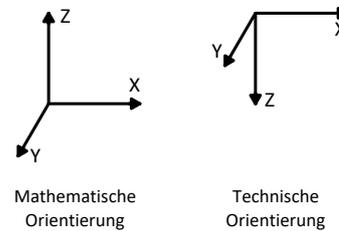


Abbildung 5.2: Mathematische und technische Orientierung von Koordinatensystemen

Allgemein gibt es keine Konvention für die Orientierung des globalen Koordinatensystems. In der Anwendung entspricht die  $Z$ -Achse jedoch immer der freien Falllinie (also der Verbindungslinie zum Erdmittelpunkt), sie hat jedoch keine bevorzugte Richtung. Mathematisch ist der 1. Quadrant rechts oben, wodurch  $Z$  nach oben (also weg vom Erdmittelpunkt) definiert ist. Technisch dagegen ist der 1. Quadrant eher rechts unten, wodurch  $Z$  nach unten definiert ist. Die beiden anderen Achsen ( $X$  und  $Y$ ) spannen die Ebene normal zu dieser Achse auf und können beliebig orientiert werden. Auch die Lage des absoluten Nullpunktes ist frei wählbar.

Im ebenen Fall bezeichnet  $X$  konventionell die horizontale Achse,  $Z$  die vertikale. Deren Orientierung kann auch zwischen der technischen und der mathematischen Ausrichtung frei variieren.

Das lokale Koordinatensystem hat dagegen sehr strenge Konventionen. Betrachtet man das Schnittufer eines Stabes, so weist  $x$  immer in Stabachsenrichtung aus dem Schnittufer heraus. Die Ausrichtung der beiden anderen Koordinaten ( $y$  und  $z$ ) ergeben sich durch die Rotation des globalen Koordinatensystems so, dass

die globale  $X$ -Achse mit der lokalen  $x$ -Achse zusammenfällt. Dabei sind jedoch Rotationen um die  $X$ -Achse ausgeschlossen.

Das lokale Koordinatensystem ist immer querschnittbezogen. Das bedeutet, dass das lokale Koordinatensystem nicht raumfest ist, sondern für jeden Querschnitt gleichermaßen gilt und der Ursprung wechselt, je nachdem welchen Querschnitt man gerade betrachtet.

Um leicht erkennen zu können, wie das lokale Koordinatensystem eines Stabes orientiert ist, können Hilfslinien eingeführt werden. In der alten Literatur zeigt die Hilfslinie jene Seite an, auf welcher Seite des Stabes durch ein positives Biegemoment  $M_y$  Zugspannungen entstehen. Dies ist jedoch nur hilfreich, wenn bekannt ist, wie die Achsen des lokalen Koordinatensystems zueinander orientiert sind. Man benötigt also noch zusätzliches Wissen, welches (in unserer Betrachtung) die Bedingung ist, dass sich das lokale Koordinatensystem aus einer Rotation des globalen ergibt. Dies ist jedoch schon ausreichend zur vollen Bestimmung der Orientierung des lokalen Koordinatensystems, wodurch die Bedingung der klassischen Literatur nicht mehr gebraucht wird. Wir werden daher die Hilfslinie auf jener Seite definieren, die in positiver  $z$ -Richtung zum Stab liegt.

Manchmal ist es auch notwendig innerhalb eines Stabes mehrere Koordinatensysteme (an mehreren Schnittpunkten) zu haben. Dazu definiert man ein überlokales, auch regional genanntes Koordinatensystem. Es ist gleich orientiert wie das lokale, jedoch ist sein Ursprung raumfest, nämlich so, dass der Ursprung in  $x$ -Richtung am Stabende in entgegengesetzter Richtung zur  $x$ -Koordinate liegt. Man könnte auch sagen, dass der Koordinatenursprung der Schnittpunkt der Stabachse mit dem allerersten Querschnitt des Stabes ist.

Das überlokale Koordinatensystem wird normal mit  $x, y, z$  markiert, die eigentlichen lokalen Koordinatensysteme werden dann im Index durchnummeriert bzw. anderweitig gekennzeichnet (z.B.  $x_l, x_r$ ).

## 5.2 Erläuterung der Zustandsgrößen in der Tragwerkslehre

### 5.2.1 Lasten

Lasten sind Substitutionen von äußeren Einflüssen. Sie zählen daher sowohl zu den Einwirkungen, als auch zu den äußeren Kraftgrößen.

Punktlasten werden konventionell mit Großbuchstaben bezeichnet, geläufig sind vor allem  $G$ ,  $Q$  und  $F$  für Einzellasten und  $M$  für Einzelmomente. Dagegen werden Linienlasten mit Kleinbuchstaben gekennzeichnet, konventionell  $g$  und  $q$  für Linienkräfte und  $m$  für Linienmomente. Wenn notwendig, so werden diese mit Indizes durchnummeriert. In manchen Fällen können die Bezeichnungen der Lasten auch die Richtung des Kraftgrößenvektors angeben. Im zweidimensionalen Fall sind dafür  $V$  für Vertikal und  $H$  für Horizontal gebräuchlich, im dreidimensionalen die Koordinaten  $X$ ,  $Y$  und  $Z$ <sup>3</sup>.

Linienlasten können in Einzellasten umgewandelt werden. Dazu integriert man die Linienlast  $q(r)$  über die gesamte Länge  $r$  auf:

$$Q = \int_r q(r) dr \quad (5.1)$$

Sie setzt dann im Punkt

$$r_1 = \frac{\int_r r q(r) dr}{\int_r q(r) dr} \quad (5.2)$$

an. Lastfälle werden mit dem griechischen Buchstaben  $\Phi$  bezeichnet. Unter einem Lastfall versteht man eine Zusammenfassung von aller Einzellasten  $Q$  und aller Linienlasten  $q$  über die gesamte Stablänge. Vorläufig können wir  $\Phi$  als einen

---

<sup>3</sup>Obwohl (im Regelfall) die Kräfte entlang des lokalen Koordinatensystems orientiert sind, werden sie (nach der Standardnotation) mit Großbuchstaben benannt.

Vektor

$$\Phi = \begin{pmatrix} Q \\ q \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

sehen. Seine wirkliche Zusammensetzung ist aber dem gewählten mathematischen Kontext zu entnehmen, welche später besprochen werden.

### 5.2.2 Auflagerreaktionen

Auflagerreaktionen zählen zu den Auswirkungen, da sie von den Lasten erzwungen werden, jedoch ebenfalls zu den äußeren Einwirkungen, da sie für das äußerliche Gleichgewicht notwendig sind. Wie wir bereits gesehen haben, korrespondiert mit jeder Auflagerreaktion eine Deformation. Daher ist es günstig alle Kraftgrößen in einem Auflager nicht als einen Vektor zu behandeln, sondern sie in ihre einzelnen Kraftgrößenkomponente aufzuspalten.

Zur Kennzeichnung wird meist ein eigenes lokales Koordinatensystem für das Auflager eingeführt, welche mit Großbuchstaben durchnummeriert werden. Das lokale Koordinatensystem ist entweder gleich orientiert wie das globale Koordinatensystem, oder wie das lokale Koordinatensystem des verbundenen Stabes.

Ist das Koordinatensystem des Auflagers gleich dem globalen, so gilt dieselbe Konvention wie bei Lasten. Im zweidimensionalen Fall werden Auflagerreaktionen mit  $V$  für vertikal bzw.  $H$  für horizontal bezeichnet. Dies kann dann der Name der Kraft sein und der Index zeigt dann das Auflager (z.B.  $V_A$ ) oder umgekehrt, so dass die Bezeichnung der Kraft das Auflager zeigt und der Indizes die Richtung (z.B.  $A_V$ ). Im zweidimensionalen Fall werden Auflagermomente schlicht als  $M_A$  bezeichnet, wobei  $A$  ein Platzhalter für eine beliebige Bezeichnung eines Auflagers ist.

Im dreidimensionalen Fall werden die Kräfte eines Auflagers gleich dem Auflager

bezeichnet und der Index ist gleich der Richtung der Kraft. Momente werden mit  $M$  bezeichnet, wobei die erste Stelle des Index das Auflager angibt und die zweite Stelle die Vektorrichtung. In Anlehnung an die durch sie entstehende Torsion wird  $M_{A,x}$  oft als  $M_{A,T}$  bezeichnet.

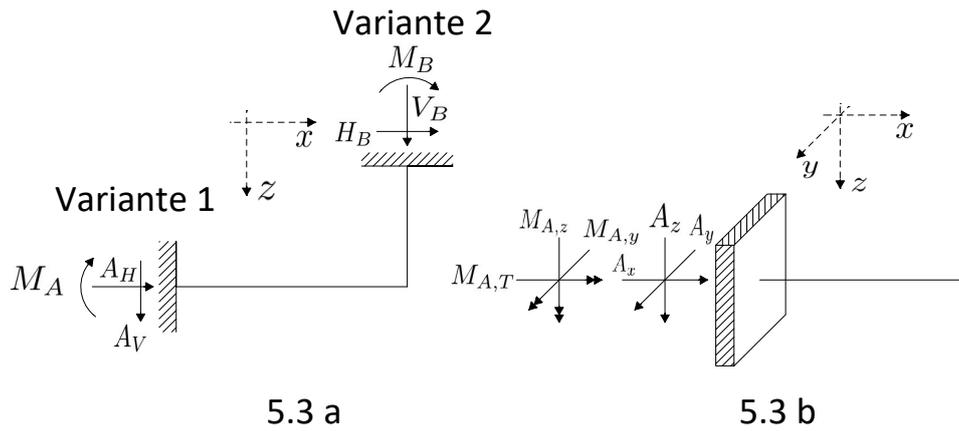


Abbildung 5.3: Darstellung eines global orientiertem Auflagers im ebenen und räumlichen Fall

Führt man dagegen ein lokales Koordinatensystem für Auflager ein, so werden Kräfte immer gemäß ihrem Auflager benannt. Der Index ist dann gleich der Schnittgröße, die diese Kraft im Stab hervorrufen würde (z.B.  $A_N$ ,  $A_{V_z}$ ). Momente werden gleich bezeichnet wie jene Momente im Stab, mit der Ausnahme, dass die erste Stelle des Index das Auflager angibt (z.B.  $M_{A,T}$ ).

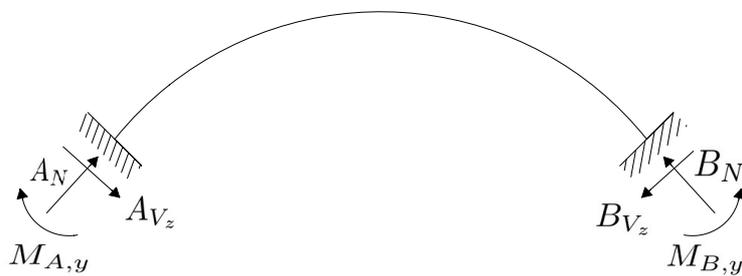


Abbildung 5.4: Darstellung eines lokal orientiertem Auflagers

### 5.2.3 Schnittgrößen

Schnittgrößen sind innere Kräfte in Stäben, welche das innere Gleichgewicht halten. Sie werden noch ausführlich in Abschnitt 5.3 diskutiert, hier sei lediglich deren konventionelle Bezeichnung und Orientierung beschrieben. Dafür ist vollkommen ausreichend zu wissen, dass Schnittgrößen die Übertragung von Lasten im inneren von Stäben beschreiben.

Nach ihrer Orientierung (und ihrer Wirkung) unterscheidet man vier innere Kraftgrößen:

- Längs- oder Normalkraft  $N$   $[N]/[kN]$
- Querkräfte  $V_i$  oder  $Q_i$   $[N]/[kN]$
- Biegemomente  $M_i$   $[Nm]/[kNm]$
- Torsionsmoment  $M_T$   $[Nm]/[kNm]$

Schnittgrößen werden an dem lokalen Koordinatensystems des Stabes ausgerichtet. Jene Kraft, welche in  $x$ -Richtung, also in Stabachse zeigt, wird Normalkraft  $N$  genannt. Kräfte, welche normal auf die Stabachse stehen, heißen Querkräfte und werden je nach ihrer Wirkungsrichtung als  $V_y$  oder  $V_z$  bezeichnet. Die von ihnen ausgelösten Biegemomente heißen  $M_y$  bzw.  $M_z$ , je nachdem in welche Richtung ihr Vektor zeigt. Das Moment in Stabachse wird Torsionsmoment  $M_T$  genannt.

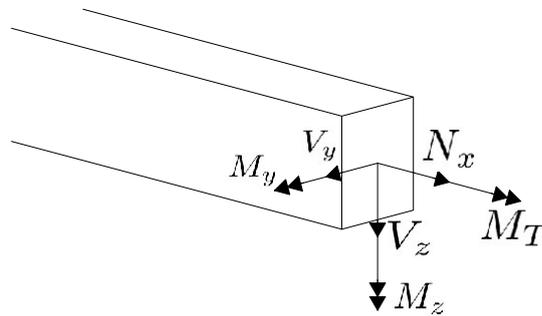


Abbildung 5.5: Orientierung von Schnittgrößen

Zu den inneren Kraftgrößen zählen außerdem die Spannungen  $\sigma$  und  $\tau$ . Sie werden jedoch in diesem Kapitel nicht behandelt.

#### 5.2.4 Verformungen

Verformungen ist ein Überbegriff für jede Art von Verschiebung und Verdrehung. Sie werden in Wegeeinheiten (also Meter bzw. Rad) gemessen und geben die absolute Lageänderung von einzelnen Punkten von Stäben an. Da sie von außen sichtbar sind zählen sie zu den äußeren Größen.

Im räumlichen Fall unterscheidet man je drei Verschiebungen und drei Verdrehungen. Die Verschiebungen werden mit  $u$ ,  $v$  und  $w$  bezeichnet.  $u$  weist in  $x$ -Richtung,  $v$  in  $y$ -Richtung und  $w$  in  $z$ -Richtung, unabhängig vom betrachteten Koordinatensystem. Verdrehungen werden als  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$  oder  $\varphi_z$  bezeichnet. Der Index gibt die Richtung des Winkelvektors an, also die Achse um welche rotiert wird.

Äußere Weggrößen können sowohl durch Lasten erzwungen werden, als auch als Anfangsbedingung einwirken, weshalb sie sowohl als Einwirkungen, als auch aus Auswirkungen charakterisiert werden können. Dies kann man umgehen, indem man zwischen Zwangsverformungen (Auswirkungen) und normalen Verformungen (Einwirkungen) unterscheidet. Weiter haben wir bereits gesehen, dass

Zwangsverformungen nichts weiter sind, als normale Verformungen, welche von anderen Tragwerksteilen übertragen werden.

Es gilt: Jede äußere Kraftgröße führt zu einer Verformung.

### 5.2.5 Verzerrungen

Verzerrungen sind wie Verformungen Weggrößen und charakterisieren eigentlich genau denselben Sachverhalt wie jene (die Verformung von Tragwerken). Allerdings sind Verzerrungen, im Gegensatz zu Verformungen, dimensionslos. Sie charakterisieren also die relative Längen- oder Winkeländerung in Bezug auf eine Ausgangslänge bzw. eine Ausgangslage.

Sie zählen zu den inneren Weggrößen, da sie sich aus den Spannungen bzw. Schnittkräften ergeben, welche inneren Kraftgrößen sind. Weiter zählen sie natürlich zu den Auswirkungen. Zu jeder der vier Schnittgrößen  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  und  $M_T$  gibt es jeweils eine charakteristische Verzerrung. Wir werden diese nun einmal grob definieren<sup>4</sup>

- Längsverzerrung  $\varepsilon$  infolge  $N$

Greift eine Normalkraft  $N$  an einem infinitesimal kleinen Stabelement an, so führt sie zu einer Längsdehnung

$$\varepsilon = \frac{du}{dx}. \quad (5.4)$$

- Schubverzerrung  $\gamma$  infolge  $Q$

Wirkt eine Querkraft  $Q$  an einem infinitesimal kleinen Stabelement an, so verschiebt es die beiden Schnittufer um einen Wert  $dw$  gegeneinander. Aus

---

<sup>4</sup>Sie werden in Abschnitt 5.4 nähergehend behandelt.

der Abbildung 5.6 b lässt sich dann

$$dw = \tan(\gamma) \cdot dx \quad (5.5)$$

ablesen, was sich wegen der Kleinheit von  $\gamma$  auf

$$\gamma = \frac{dw}{dx} \quad (5.6)$$

vereinfacht.

- Verkrümmung  $\kappa$  infolge  $M$

Ein Biegemoment  $M_B$  führt an einem Stabelement der Länge  $dx$  zu einer Verkrümmung um den Winkel  $d\varphi$ . Aus dem Abbild 5.6 c erkennt man:

$$dx = \rho \cdot d\varphi \quad (5.7)$$

Definiert man nun  $\kappa$  als den Reziprokwert von  $\rho$  so lässt sich auf

$$\kappa = \frac{d\varphi}{dx} \quad (5.8)$$

umformen.

- Verdrillung  $\nu'$  infolge  $M_T$

Infolge einer Torsionsbeanspruchung verdrillt sich ein infinitesimales Stabelement um  $d\nu$ .  $\nu'$  ergibt sich dann nach Abbildung 5.6 d als

$$d\nu' = \frac{d\nu}{dx} \quad (5.9)$$

- Verzerrungen infolge lastfreier Einwirkungen

Alle oben aufgeführten Verzerrungen können auch durch andere physika-

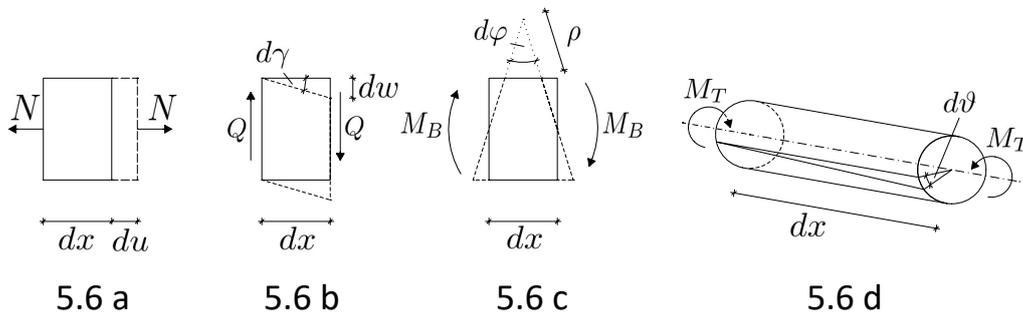


Abbildung 5.6: Überblick über Verzerrungen

liche Phänomene ohne Schnittgrößeneinwirkung erfolgen. Wichtige Beispiele hierfür sind Temperaturverformung, Schwinden oder Kriechen. Sie sind jedoch Aufgabe von anderen Fachgebieten und werden hier nicht ausführlich behandelt, sondern nur erwähnt.

Nachdem jetzt alle Zustandsgrößen eines Tragwerks bekannt sind, können sie nun in einem größeren Kontext zusammengesetzt werden.

### 5.2.6 Zusammenhang der Zustandsgrößen

Alle nun aufgezählten Zustandsgrößen hängen natürlich in einem ausführlichen Formelnetz zusammen. Diese Zusammenhänge seien hier kurz angerissen. Qualitative Details sowie mathematische Formulierungen werden jedoch erst in den folgenden Kapiteln besprochen.

Ausgangspunkt jeder statischen Überlegung ist die Tragwerksgeometrie (wobei angenommen wird, dass das Tragwerk im Gleichgewicht ist) und der Lastfall. Beide werden als bekannt gefordert. Aus der Kombination beider können zuerst die Auflagerreaktionen und dann die Schnittgrößen bestimmt werden.

Mithilfe der Stabgeometrie (also der Querschnittsausbildung) können Schnittgrößen dann in Spannungen umgerechnet werden, welche Aussagen über das

<sup>5</sup>Die Indizes markieren den Ursprung der Zwangsverzerrung. Sie werden noch im Abschnitt (Verformungen) über lastfreie Verformungen genauer besprochen.

Zustandsgrößen	⇔	Einwirkungen	⇔	Einwirkende Kraftgrößen	⇔	Lasten	$Q_i, M_i, q_i(x), m_i(x)$
				⇔	Zwangsverzerrungen	$\varepsilon_T, \gamma_K, \kappa_{\Delta T}, \vartheta'_{\Delta T} \text{ }^5$	
	⇔		⇔	Zwangsverformungen	$u_z, v_z, w_z, \varphi_{i,z}$		
	⇔	Auswirkungen	⇔	⇔	Lagerverschiebungen	$\Delta u, \Delta v, \Delta w, \Delta \varphi_i$	
				⇔	Innere Kraftgrößen (Schnittgrößen)	$N_x, V_i, M_i, M_T$	
			⇔	Äußere Kraftgrößen (Auflagerreaktionen)	$A_V, A_H, M_A$		
		⇔	⇔	⇔	Innere Weggrößen (Verzerrungen)	$\varepsilon, \gamma, \kappa, \vartheta'$	
				⇔	Äußere Weggrößen (Verformungen)	$u, v, w, \varphi_i, \vartheta$	
				⇔			

Tabelle 5.1: Übersicht über die Zustandsgrößen

Versagen eines Stabes erlauben.

Aus Spannungen ergeben sich dann Verzerrungen, welche jedoch, wegen dem engen Zusammenhang aus Spannungen und Schnittgrößen unter Berücksichtigung der Stabgeometrie auch direkt aus den Schnittgrößen berechnet werden können.

Zuallerletzt können Verzerrungen durch einfaches Aufaddieren in echte Verformungen umgerechnet werden.

Folgende Übersicht soll diese Zusammenhänge noch einmal herausstellen:

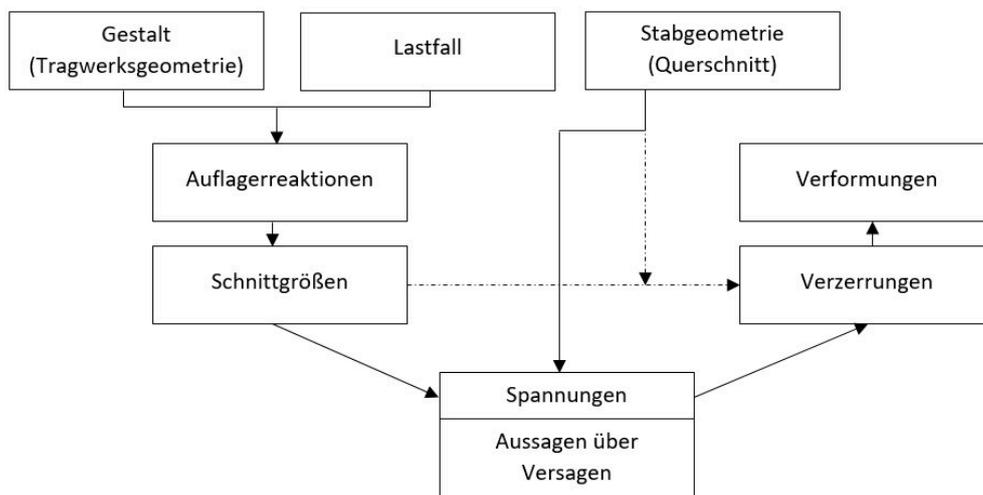


Abbildung 5.7: Zusammenhang der Zustandsgrößen

## 5.3 Schnittkräfte

### 5.3.1 Allgemeines

Schnittkräfte sind ein zentraler Begriff der Statik. Sie sind deswegen interessant, da sie eng mit Spannungen verbunden sind, welche Vorhersagen erlauben, ob und wo ein Stab versagt bzw. wie er sich verformt. Zum Verständnis ihrer Bedeutung betrachten wir ein beliebiges Stabelement, welches mittig von seiner zweiten Hälfte freigeschnitten wird.

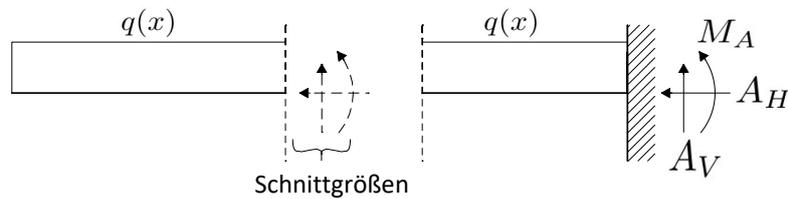


Abbildung 5.8: Beispiel zur Verdeutlichung der Bedeutung von Schnittgrößen

Zusätzlich soll der Stab durch eine beliebige Last angegriffen werden, welche normalerweise eine Beschleunigung hervorrufen würde. Wenn wird bedingen, dass solch eine nicht eintreten darf, die Beschleunigung jedoch nicht entlang des Stabelementes verhindert werden kann, so muss sie vom abgetrennten Stabteil unterbunden werden. Da dieser Stabteil jedoch weggeschnitten wurde, muss dessen gleichgewichtsschaffender Einfluss simuliert werden. Dafür denkt man sich im Modell der Kontinuumsmechanik jeden Querschnitt durch unendlich viele infinitesimal dünne Fasern verbunden. Diese Fasern kann man sich als reale, materielle Verbindungen vorstellen, jedoch auch als imaginäre Substitutionen für Fernwirkungen. Alle Fasern gemeinsam werden als Übertragungsmedium für Kräfte gesehen, so dass jeder Querschnitt durch Kraftwirkung an seine Nachbarn gebunden ist. Diese Kräfte nennt man Schnittkräfte.

Sie können für einen betrachteten Querschnitt durch Gleichgewichtsbetrachtungen am Stabelement gefunden werden. Für jeden Freiheitsgrad ist ein eigenes Gleichgewicht zu bilden, womit sich eine eigene Schnittgröße ergibt. Freiheitsgrade sind all jene Koordinaten, welche mindestens notwendig sind, um ein System vollständig zu beschreiben, also jede beliebige Lageänderung beschreiben zu können. Ein damit gleichwertiges Kriterium ist, das man in einem Satz von unabhängigen Koordinaten immer in der Lage ist, jede davon beliebig zu ändern und simultan alle anderen konstant zu halten. Ist dies nicht möglich (wenn also eine Änderung einer Koordinate mit der Änderung einer anderen einhergehen muss), dann ist der gewählte Satz von Variablen nicht gleich den Freiheitsgraden eines Systems.

Der 3-dimensionale Raum hat sechs Freiheitsgrade, der 2-dimensionale drei. Dem entsprechend ergeben sich in einem Schnitt im räumlichen Fall sechs Schnittgrößen:

- Normalkraft  $N_x$ <sup>6</sup> Translation in  $x$ -Richtung
- Querkraft in  $y$ -Richtung  $V_y$  Translation in  $y$ -Richtung
- Querkraft in  $z$ -Richtung  $V_z$  Translation in  $z$ -Richtung
- Biegemoment in  $y$ -Richtung  $M_y$  Rotation um  $y$
- Biegemoment in  $z$ -Richtung  $M_z$  Rotation um  $z$
- Torsionsmoment in  $x$ -Richtung  $M_T$  Rotation um  $x$

Im ebenen Fall reduzieren sie sich auf drei:

- Normalkraft  $N_x$  Translation in  $x$ -Richtung
- Querkraft in  $z$ -Richtung  $V_z$  Translation in  $z$ -Richtung
- Biegemoment in  $y$ -Richtung  $M_y$  Rotation um  $y$

Betrachtet man nur ein Schnittufer, so sind all diese Schnittkräfte unabhängig voneinander. Betrachtet man dagegen einen Stabteil mit zwei (oder mehr) Schnittufern, wie in Abb. 5.9, so erhält man doppelt so viele Schnittkräfte, von denen nun die Hälfte abhängig ist. Abhängig heißt in diesem Zusammenhang, dass eine Änderung einer beliebigen Schnittgröße (unter Annahme dass die Belastung  $q(x)$  eine Transformation ist) immer mit der Änderung mindestens einer weiteren Schnittgröße einhergeht. Die Anzahl von Schnittkräften, welche mindestens notwendig sind, um alle anderen zu berechnen, heißt ein Satz von unabhängigen Schnittgrößen. Er ist immer gleich der Anzahl der Freiheitsgrade eines Systems. Im Regelfall gibt es mehrere Sätze von unabhängigen Schnittgrößen, welche wir nun diskutieren werden.

<sup>6</sup>Oft wird  $N_x$  auch einfach als  $N$  geschrieben.

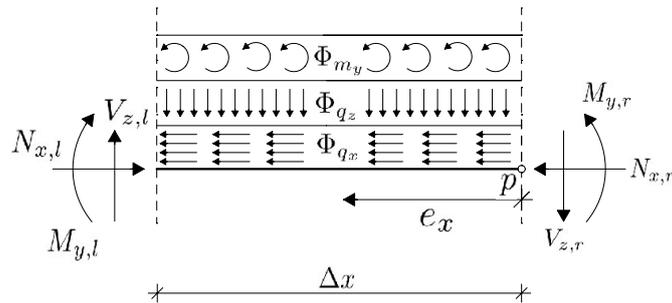


Abbildung 5.9: Stabteil mit zwei Schnittufern und Schnittgrößen

Dazu betrachten wir wieder den Stabteil in Abb. 5.9 und bilden das Gleichgewicht für alle Freiheitsgrade. Hierfür wird der Zusammenhang

$$M_j = V_i \cdot e_x \quad (5.10)$$

als bekannt vorausgesetzt. Hier und von nun an wird die Indexkonvention der Mechanik benutzt, in welche  $i$  entweder für  $y$  oder  $z$  stehen kann,  $j$  dann aber immer für das jeweils andere. Eine weitere in diesem Buch verwendete Konvention ist die Schreibweise  $\Phi$  als Stellvertreter für jede beliebige Art von Einwirkung, sowohl in Art als auch Orientierung. Es wird im Regelfall (inklusive dem jetzt diskutierten Fall) als gegeben angenommen. Das bedeutet, dass  $\Phi$  immer der Veränderung  $\Delta S$  einer beliebigen Schnittgröße  $S$  zu interpretieren ist. Die Schnittgröße, um welche es sich im Detail handelt, wird dann in den Index von  $\Phi$  als  $\Phi_S$  geschrieben.

Aus

$$\sum_i H_i = N_{x,r} - N_{x,l} + \Phi_{q_x} = 0 \quad (5.11)$$

folgt

$$N_{x,l} = N_{x,r} - \Phi_{q_x}. \quad (5.12)$$

Aus

$$\sum_i V_i = V_{z,r} - V_{z,l} + \Phi_{q_z} = 0 \quad (5.13)$$

folgt

$$V_{z,l} = V_{z,r} + \Phi_{q_z}. \quad (5.14)$$

Aus

$$\sum_i M_{y,p,i} = M_{y,r} - M_{y,l} + \Phi_{m_y} + \Phi_{q_z} \cdot e_x + V_{z,l} \cdot \Delta x = 0 \quad (5.15)$$

folgt

$$M_{y,l} = M_{y,r} + \Phi_{m_y} + \Phi_{q_z} \cdot e_x + V_{z,l} \cdot \Delta x, \quad (5.16)$$

aber auch

$$V_{z,l} = \frac{M_{y,l} - M_{y,r} - \Phi_{m_y} - \Phi_{q_z} \cdot e_x}{\Delta x}. \quad (5.17)$$

Man kann daraus zwei Konfigurationen von unabhängigen Schnittgrößen bilden:

- $N_{x,i}, V_{z,i}, M_{y,i}$
- $N_{x,i}, M_{y,l}, M_{y,r}$

Es ist also möglich die Querkraft durch ein zweites Moment an einem unterschiedlichen Schnittpunkt zu ersetzen. Durch Symmetrieüberlegungen zwischen den Koordinaten, kann man diese Überlegung auf den dreidimensionalen Fall anwenden.

Für die weitere Betrachtung ist außerdem die Unterscheidung zwischen gebundenen und ungebundenen Schnittgrößen wichtig. Ungebundene Schnittgrößen sind jene, deren Größe unabhängig von anderen Schnittgrößen ist. Zu ihnen zählen  $N_x, V_y, V_z$  und  $M_x$ . Die Größe von gebundenen Schnittgrößen dagegen hängt von anderen Schnittgrößen ab. Damit gemeint sind die Momente  $M_y$  und  $M_z$ , da für sie  $M_j = V_i \cdot e_x$  gilt.

Schlussendlich sei noch etwas zur Orientierung von Schnittufern und deren Schnittgrößen gesagt. In Abbildung 5.10 ist dazu ein Schnitt durch einen Stab dargestellt. Auch Schnittufer haben in Form einer Flächennormalen einen Vektor  $A$ , welcher ihre Orientierung angibt. Dieser Vektor wird mit dem überlokalen Koordinatensystem beschrieben. An ihm wird das lokale Koordinatensystem (und damit die Schnittgrößen) orientiert.

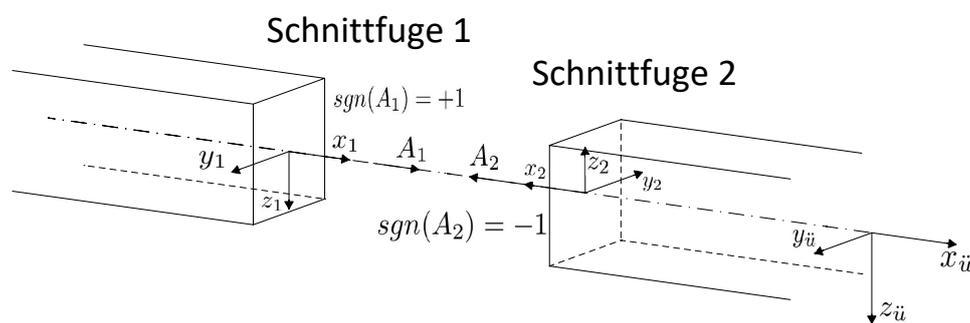


Abbildung 5.10: Schnittufer und Flächennormalen und die Orientierung von lokalen Koordinatensystemen

Ist die Flächennormale positiv, so sind auch alle lokalen Koordinatenachsen in positive, überlokale Koordinatenrichtung positiv. Ist die Flächennormale dagegen negativ, so sind die lokalen Koordinatenachsen dieser Fläche in negative, überlokale Koordinatenrichtung positiv. Diese Konvention ergibt sich aus Gleichgewichtsbedingungen an der Schnittfuge. Sie hat aber auch mathematische Bedeutung wie wir im folgenden Kapitel sehen werden.

Zur Abbildung 5.10 sei gesagt, dass  $sgn()$  die Vorzeichenfunktion ist. Sie ist definiert als

$$sgn(x) = \begin{pmatrix} +1 & x > 0 \\ 0 & \text{, wenn } x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

### 5.3.2 Mathematische Beschreibung und Berechnung

Definitionsgemäß ergeben sich Schnittgrößen aus Gleichgewichtsbedingungen am betrachteten Schnittufer. Dies ist als das Schnittgrößenprinzip bekannt:

„Schnittkräfte sind jene Kraftgrößen, welche auf den Schnittquerschnitt einwirken müssen, damit dieser im Gleichgewicht ist.“

Man fordert also das Gleichgewicht einer bestimmten Kraftgröße und berechnet sich daraus jene Schnittgröße die nötig ist, damit Equilibrium herrscht. Allgemein kann man so viele Gleichgewichtsbedingungen aufstellen, wie es Freiheitsgrade gibt. In der dritten Dimension wären dies

- $\sum_i F_{x,i} = 0$  die Summe aller Kräfte in  $x$ -Richtung,
- $\sum_i F_{y,i} = 0$  die Summe aller Kräfte in  $y$ -Richtung,
- $\sum_i F_{z,i} = 0$  die Summe aller Kräfte in  $z$ -Richtung,
- $\sum_i M_{x,i} = 0^7$  die Summe aller Momente in  $x$ -Richtung,
- $\sum_i M_{y,i} = 0$  die Summe aller Momente in  $y$ -Richtung,
- $\sum_i M_{z,i} = 0$  sowie die Summe aller Momente in  $z$ -Richtung.

Im ebenen Fall hat man dagegen ausschließlich

- $\sum_i F_{x,i} = 0$  die Summe aller Kräfte in  $x$ -Richtung,
- $\sum_i F_{z,i} = 0$  die Summe aller Kräfte in  $z$ -Richtung,
- $\sum_i M_{y,i} = 0$  und die Summe aller Momente in  $y$ -Richtung.

Für diesen im Prinzip einfachen Gedanken werden im Folgenden etwas analytischere Algorithmen beschrieben, welche die auf den Schnittgrößen aufbauenden Berechnungen (wie z.B. Verformungsberechnungen) gehörig vereinfachen.

---

<sup>7</sup> $M_x$  wird auch oft als das Torsionsmoment  $M_T$  bezeichnet.

Dafür werden wir uns zuerst mit der Definition von Formelzeichen und Indizes beschäftigen.

Zur einfacheren Beschreibung fasst man alle Schnittkräfte in einem Vektor  $F_S$  und alle Momente in einem Vektor  $M$  zusammen:

$$F_S = \begin{pmatrix} N_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} \qquad M_S = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}$$

Diese Vektoren fasst man wiederum im Schnittgrößenvektor  $S$  zusammen.

$$S = \begin{pmatrix} F_S \\ M_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_x \\ V_y \\ V_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}$$

Im ebenen Fall reduziert sich dieser auf

$$S = \begin{pmatrix} N_x \\ V_z \\ M_y \end{pmatrix}.$$

Äquivalent werden auch Lastfälle angeschrieben:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_{q_x} \\ \Phi_{q_y} \\ \Phi_{q_z} \\ \Phi_{m_x} \\ \Phi_{m_y} \\ \Phi_{m_z} \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \Phi = \begin{pmatrix} \Phi_{q_x} \\ \Phi_{q_z} \\ \Phi_{m_y} \end{pmatrix}$$

Die in den Indizes gewählten Kleinbuchstaben  $q$  und  $m$  stehen in keinem Zusammenhang mit den gleich notierten Linienlasten, sondern dienen einzig der Aufklärung, ob das betrachtete Element Kräfte oder Momente behandelt. Der Lastfall  $\Phi$  fasst sowohl Einzellasten als auch Linienlasten zusammen. Abgesehen davon ist  $q$  jedoch der Überbegriff für alle Linienlasten sämtlicher Art und  $Q$  der Überbegriff für alle Punktlasten, unabhängig ob Kraft oder Moment.

Schlussendlich sei noch die spezielle Notation geklärt, welche mit gebundenen und ungebundenen Schnittgrößen einhergeht. Der allgemeine Schnittgrößenvektor wird in die Vektoren

$$S_u = \begin{pmatrix} N_x \\ V_y \\ V_z \\ M_x \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S_g = \begin{pmatrix} M_y \\ M_x \end{pmatrix}$$

zerlegt. Zusätzlich muss noch der Vektor  $\mathbb{M}^8$  eingeführt werden, welcher äquivalent mit  $\Phi$  einen Lastfall repräsentiert. Während jedoch  $\Phi$  die Wirkung von Lasten auf deren Schnittgröße bezeichnet (z.B.  $Q_x$  auf  $N_x$ ), so bezeichnet  $\mathbb{M}$  die Wirkung von ungebundenen Schnittgrößen auf ihre korrespondierenden gebundenen Schnittgrößen (z.B.  $Q_y$  auf  $M_z$ ).

Mit diesem Wissen können nun die Indizes erklärt werden.

Der (erste Term des) Index soll immer angeben, um welche Orientierung bzw. welchen Typus Vektor es sich handelt. Allgemein unterscheidet man bei Schnittgrößenbetrachtungen zwischen vier Typen an Vektoren, welche sich alle in ihren Gliedern unterscheiden. Der allgemeinste Vektor ist jener, welcher alle Schnittgrößen vereint:

---

<sup>8</sup>Es sei angemerkt, dass  $\mathbb{M}$  nicht das lateinische  $M$ , sondern das griechische  $M_y$  repräsentiert.

$$S = \begin{pmatrix} N_x \\ V_y \\ V_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}$$

Er hat keinen ihn auszeichnenden Index, da er als Standardfall gesehen wird. Der zweite wäre jener der ungebundenen Schnittgrößen

$$S_u = \begin{pmatrix} N_x \\ V_y \\ V_z \\ M_x \end{pmatrix},$$

welcher  $u$  als Index trägt. Der nächste wäre jener der gebundenen Schnittgrößen

$$S_g = \begin{pmatrix} M_y \\ M_z \end{pmatrix},$$

welcher mit  $g$  bezeichnet wird. Der letzte ist jener der konjugierten ungebundenen Schnittgrößen, also jene ungebundenen Schnittgrößen, welche gebundene beeinflussen:

$$S_{\ddot{u}} = \begin{pmatrix} V_y \\ V_z \end{pmatrix}$$

Der hierfür verwendete Index ist  $\ddot{u}$ <sup>9</sup>.

---

<sup>9</sup>Der etwas unkonventionelle Buchstabe  $\ddot{u}$  wurde verwendet, um anzudeuten, dass die Elemente dieses Vektors ungebundene Schnittgrößen sind, welche jedoch eine spezielle Funktion bzw. Wirkung haben.

Weiters ist es jedoch oft erwünscht immer nur auf ein Element eines Vektors Bezug zu nehmen, ohne ein Element auszuzeichnen (also die Betrachtung für alle Elemente verallgemeinert zu halten). Hierfür wird der Laufindex  $i$  benutzt. Er wird hinter den Indizesternen  $u$ ,  $g$  und  $\ddot{u}$  gesetzt und deutet an, dass nur von einem (beliebigen) Element dieses Vektors die Rede ist.

So kann  $S_i$  zum Beispiel für eine beliebige Schnittgröße stehen,  $S_{\ddot{u},i}$  jedoch nur für  $V_y$  oder  $V_z$  stehen.

Diese Indexkonvention kann natürlich von Schnittgrößen per se auch auf alle davon beeinflussten Größen (insbesondere Lasten) übertragen werden.

Eine weitere wichtige Notation ist die Unterscheidung zwischen dem überlokalen und dem lokalen Koordinatensystem. Das überlokale Koordinatensystem sitzt am Anfang des betrachteten Stabes und ist einzig und alleine dafür notwendig, die einzelnen lokalen Koordinatensysteme zu unterscheiden, welche in den Schnittufern liegen. Dies ist wichtig, da die Schnittgrößen in den unterschiedlichen Schnittufern natürlich unterschiedlich groß sind. Um unterscheiden zu können, welches Schnittufer (also welchen Stabpunkt) man gerade betrachtet, wird bei Schnittgrößenvektoren immer die überlokale  $x$ -Koordinate des betrachteten Stabachsenpunktes angegeben.

Die Schnittgrößen selber werden jedoch immer im lokalen Koordinatensystem des Schnittufers bzw. des Stabachsenpunktes orientiert. Dieselbe Schnittgröße kann also aus überlokaler Sicht an verschiedenen Stabachsenpunkten unterschiedlich gerichtet sein. Zwischen dem  $x$  des überlokalen und dem  $x$  des lokalen Koordinatensystems wird hier jedoch trotzdem nicht unterschieden; vor allem, da es zu keiner Konfrontation bzw. Verwechslung derer beiden kommen kann. Ist in den folgenden Betrachtungen von der Variable  $x$  die Rede, so ist **immer** die überlokale Koordinate  $x$  gemeint. Einzig und allein die  $x$ -e in den Indizes der Schnittgrößen ( $N_x$  bzw.  $M_x$ ) bezeichnen  $x$ -e in den lokalen Koordinatensystemen.

Da nun die allgemeine Notation geklärt ist, kann jetzt etwas zu dem allgemeinen

Berechnungsvorgang der Schnittgrößen gesagt werden:

Zuerst einmal sei ein grundlegender modelltechnischer Aspekt angesprochen:

„Schnittkräfte sind über den Querschnitt konstant.“

Dies zu beweisen ist eine schwierige Angelegenheit, welche tief in die fundamentale Diskussion der Modelle der Statik hineinführt, welche in Anhang „Diskussion des Modells der Statik“ genauestens besprochen wird. Zusammenfassend kann man jedoch sagen, dass eine Aussage wie diese im Modell der Schnittkräfte gar keinen Sinn hat. Das Modell der Schnittgrößen betrachtet ausschließlich die 1-dimensionale Idealisierung eines Stabes auf seine Stabachse. Dadurch sind Querschnitte (und Schnittufer) eigentlich gar kein Bestandteil dieses Modelles. Schnittgrößen werden also per Definition immer nur für einen Punkt (den Schwerpunkt eines Querschnittes) bestimmt<sup>10</sup>.

Wie in 5.3.1 ausgeführt, müssen an einem Stabelement drei der sechs Schnittgrößen bekannt sein um die restlichen mit

$$S_l + \Delta S = S_r \quad (5.19)$$

bestimmen zu können. In der Regel ist dies jedoch nicht der Fall. Es gibt jedoch Punkte/ Querschnitt bei denen die Schnittkräfte in ihnen als Nebenbedingungen gegeben sind. Solche Punkte wären die in Abschnitt 4.2.5 besprochenen Knoten. Der einzige Knoten, in dem alle Schnittkräfte bekannt sind, sind freie Enden. In einem freien Ende gilt:

---

<sup>10</sup>Für die Diskussion der Zweckes und Sinnhaftigkeit solcher Aussagen wie „Schnittkräfte sind über den Querschnitt konstant“ sei auf Anhang „Diskussion des Modells der Statik“ verwiesen.

$$S = \begin{pmatrix} N_x \\ V_y \\ V_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = 0$$

Geht man also von einem freien Ende aus, so sind alle Schnittgrößen des Stabes bestimmbar, wenn die Größe  $\Delta S$  bekannt ist, da dann  $S = \Delta S$  gilt. Die Schnittgrößenbestimmung wird also zur Berechnung von  $\Delta S$ . Für dessen Berechnung gibt es zwei verschiedene Formalismen, welche sich in ihrer mathematischen Beschreibung von Punkt- und Linienlasten unterscheiden:

### **Konventionelle Schnittgrößenberechnung (Summenformalismus)**

Bei der konventionellen Schnittgrößenberechnung werden alle Einflüsse getrennt berechnet und zum Schluss addiert. Es entspricht einer allgemeinen Endformel für Gleichgewichtsüberlegungen an einem Punkt  $x$ .

Dieser Punkt  $x$  wird in den Index des Schnittgrößenvektors  $S$  geschrieben, so dass sich die ungebundene Schnittgrößen  $S_{u,x}$  und die gebundene  $S_{g,x}$  lesen. Gleich wird mit Einzellasten vorgegangen. Zur Unterscheidung zum betrachteten Punkt  $x$ , werden deren Einwirkungspunkte jedoch mit  $x_k$  bezeichnet.

Linienlasten sind in diesem Formalismus immer Funktionen nach  $x$ , welche jedoch nur auf ihrem Wirkungsbereich

$$D = \{x | x_k < x < x_m\} \quad (5.20)$$

definiert sind, wenn  $x_k$  der „Anfangspunkt“ und  $x_m$  den „Endpunkt“ bezeichnen. Auch bei Linienlasten wird  $x_k$  in den Index genommen, um dessen Lage anzu-

geben. Jedoch wird, wie aus Kap. [Gidi ist uncool] bekannt, der Index in den Superscript geschrieben, um im Subscript Platz für die Abhängigkeit von  $x$  zu machen.

Da Linienlasten über  $Q = \int q(x)dx$  in Einzellasten umgewandelt werden können, kann man für eine beliebige ungebundene Schnittgrößenkomponente

$$S_{u,i,x} = \sum_{x_k < x} Q_{u,i,x_k} + \sum_{x_k < x} \int_{x_k}^{\min(x_m,x)} q_{(x)}^{(u,i,x_k)} dx \quad (5.21)$$

schreiben, wobei  $S_{u,i,x}$  ein Element des Vektors

$$S_u = \begin{pmatrix} N_x \\ V_y \\ V_z \\ M_x \end{pmatrix}$$

ist.

In diesem einfachen Fall redundant, der Vollständigkeit halber trotzdem angegeben, sei hier die Lastfunktion für eine ungebundene Schnittgrößenkomponente  $i$  für den Punkt  $x$ :

$$\Phi_{u,i,x} = \sum_{x_k < x} Q_{u,i,x_k} + \sum_{x_k < x} \int_{x_k}^{\min(x_m,x)} q_{(x)}^{(u,i,x_k)} dx \quad (5.22)$$

Es ist leicht ersichtlich, dass  $S_{u,i,x} = \Phi_{u,i,x}$  und damit  $S_{u,x} = \Phi_{u,x}$  gilt.

Ähnlich ist auch bei gebundenen Schnittgrößen vorzugehen, nur ist hier zusätzlich zu diesem Term noch zusätzlich die Formel

$$M_i = V_j \cdot e_x \quad (5.23)$$

zu beachten. Dazu ist  $\mathbb{M}$  vorgesehen. Ähnlich wie bei  $\Phi$  sind auch hier zwei Komponenten zu beachten, jene der Einzellasten und jene der Linienlasten. Die

Einzellasten  $V_j$  werden gemäß der Formel 5.23 behandelt, wobei sich  $e_x$  als  $x - x_k$  ergibt.

Äquivalent zu den ungebundenen Schnittgrößen können auch hier die Linienlasten zu Einzellasten gemäß  $Q = \int q(x)dx$  umgewandelt werden. Weiters muss jedoch noch deren Schwerpunktsabstand gemäß  $s_x = \frac{\int q(x)xdx}{\int q(x)dx}$  errechnet werden, wobei sich  $e_x$  wieder als  $x - s_x$  ergibt.

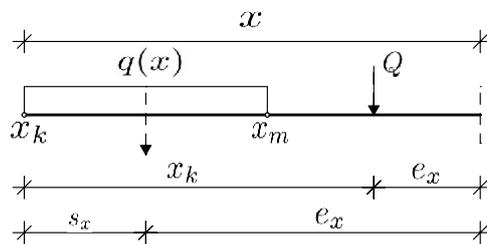


Abbildung 5.11: Lasten und ihre Normalabstände

Setzt man all diese Terme zusammen so ergibt sich für  $M_{\ddot{u}}$

$$M_{\ddot{u},i,x} = \sum_{x_k < x} Q_{\ddot{u},i,x_k} \cdot (x - x_k) + \sum_{x_k < x} \int_{x_k}^{\min(x_m,x)} q_{(x)}^{(\ddot{u},i,x_k)} \cdot \left( x - \frac{\int_{x_k}^{\min(x_m,x)} q_{(x)}^{(\ddot{u},i,x_k)} x dx}{\int_{x_k}^{\min(x_m,x)} q_{(x)}^{(\ddot{u},i,x_k)} dx} \right), \quad (5.24)$$

was sich auch als

$$M_{\ddot{u},i,x} = \sum_{x_k < x} Q_{\ddot{u},i,x_k} \cdot (x - x_k) + \sum_{x_k < x} \left( x \cdot \int_{x_k}^{\min(x_m,x)} q_{(x)}^{(\ddot{u},i,x_k)} dx - \int_{x_k}^{\min(x_m,x)} q_{(x)}^{(\ddot{u},i,x_k)} x dx \right) \quad (5.25)$$

schreiben lässt.

Da sich

$$\Phi_{g,i,x} = \sum_{x_k < x} Q_{g,i,x_k} + \sum_{x_k < x} \int_{x_k}^{\min(x_m,x)} q_{(x)}^{(g,i,x_k)} \quad (5.26)$$

auch unverändert für gebundene Schnittgrößen anwenden lässt, ist eine beliebige

gebundene Schnittgröße an einem beliebigen Punkt einfach:

$$S_{g,i,x} = \Phi_{g,i,x} + \mathbb{M}_{\ddot{u},i,x} \quad (5.27)$$

$$\begin{aligned} S_{g,i,x} = & \sum_{x_k < x} Q_{g,i,x_k} + \sum_{x_k < x} \int_{x_k}^{\min(x_m,x)} q_{(x)}^{(g,i,x_k)} + \sum_{x_k < x} Q_{\ddot{u},i,x_k} \cdot (x - x_k) \\ & + \sum_{x_k < x} \left( x \cdot \int_{x_k}^{\min(x_m,x)} q_{(x)}^{(\ddot{u},i,x_k)} dx - \int_{x_k}^{\min(x_m,x)} q_{(x)}^{(\ddot{u},i,x_k)} x dx \right) \end{aligned} \quad (5.28)$$

### Funktionsformalismus (Integralformalismus)

Beim Funktionsformalismus werden alle Einflüsse (auch Einzellasten) in Funktionen angeschrieben, um so eine Gesamtfunktion für die Schnittkräfte zu erhalten. Dieser Formalismus erweist sich als besonders nützlich bei den auf Schnittgrößen aufbauenden Berechnungen (wie Verformungen), da diese Schnittgrößenfunktionen voraussetzen.

Hierfür definiert man eine Lastfunktion  $\Phi(x)$ , welche sich der Dirac-Delta-Distribution, sowie der Heaviside-Distribution <sup>11</sup> bedient.

Einzellasten werden dann als  $Q(x)\delta(x_k)$  angeschrieben, so dass  $Q(x)$  eine Konstante Funktion mit der Magnitude von  $Q$  ist und  $x_k$  der Angriffspunkt dieser Kraft. Linienlasten werden mithilfe der beschränkten Heaviside-Distribution als  $q(x)W_{(x_k,x_m)}^{(\delta)}$  geschrieben. Hier sind  $x_k$  und  $x_m$  wieder die Grenzen, also der „Anfangs-“ und „Endpunkt“ des Wirkungsbereiches der Linienlast und  $q(x)$  eine Funktion, welche die Linienlast in diesem Intervall beschreibt. Weiters sei beachtet, dass  $x_k < x_m$  immer gelten muss.

<sup>11</sup>Wissen über diese beiden Distributionen wird hier vorausgesetzt. Sie werden in Kap. „Mathematik“ ausführlich behandelt.

Einzel- und Linienlasten können nun in der Lastfunktion vereinigt werden:

$$\Phi(x) = \sum_k Q(x)\delta(x_k) + \sum_k q(x)W_{(x_k, x_m)}^{(\delta)} \quad (5.29)$$

Werden Abhängigkeiten und Indizes gleichzeitig geschrieben, so wird wie gewohnt der Index in den Superscript und die Abhängigkeit in den Subscript geschrieben. Im Gegensatz zum Summenformalismus muss hier jedoch nur der Schnittgrößentypus und der Laufindex in den Index geschrieben werden, da der Angriffspunkt von den Distributionen bzw. den Abhängigkeiten nach  $x$  übernommen wird.

So lässt sich nun für eine beliebige ungebundene Schnittgröße

$$S_{(x)}^{(u,i)} = \int_0^x \Phi_{(x)}^{(u,i)} dx = \int_0^x \sum_k Q(x)\delta(x_k) dx + \int_0^x \sum_k q(x)W_{(x_k, x_m)}^{(\delta)} dx \quad (5.30)$$

schreiben. Natürlich können alle ungebundenen Schnittgrößen  $S_{(x)}^{(u,i)}$  im ungebundenen Schnittgrößenvektor  $S_{(x)}^{(u)}$  zusammengefasst werden, für den gilt:

$$S = \int_0^x \begin{pmatrix} \Phi_{(x)}^{(N_x)} \\ \Phi_{(x)}^{(V_y)} \\ \Phi_{(x)}^{(V_z)} \\ \Phi_{(x)}^{(M_T)} \end{pmatrix} dx$$

Äquivalent ist für gebundene Schnittgrößen vorzugehen, nur ist hier neben dem Term  $\Phi$ , welcher exakt gleich bleibt, noch der Term  $\mathbb{M}$  zu berücksichtigen. Dieser ergibt sich einfach als

$$\mathbb{M}_{(x)}^{(i)} = S_{(x)}^{(j)} = \int_0^x \Phi_{(x)}^{(j)} dx = \int_0^x \sum_k Q_{(x)}^{(j,k)} \delta(x_k) dx + \int_0^x \sum_k q_{(x)}^{(j,k)} W_{(x_k, x_m)}^{(\delta)} dx \quad (5.31)$$

Durch Addition von  $\Phi$  und  $\mathbb{M}$  erhalten wir dann schlussendlich die Formel für

eine beliebige gebundene Schnittgröße:

$$\begin{aligned}
 S_{(x)}^{(g,i)} &= \int_0^x \Phi_{(x)}^{(g,i)} dx + \int_0^x \mathbb{M}_{(x)}^{(i,j)} dx \\
 &= \int_0^x \sum_k Q_{(x)}^{(g,i,k)} \delta(x_k) dx + \int_0^x \sum_k q_{(x)}^{(g,i,k)} W_{(x_k, x_m)}^{(\delta)} dx \\
 &\quad + \int_0^x \int_0^x \sum_k Q_{(x)}^{(i,j,k)} \delta(x_k) dx^2 + \int_0^x \int_0^x \sum_k q_{(x)}^{(i,j,k)} W_{(x_k, x_m)}^{(\delta)} dx^2
 \end{aligned} \tag{5.32}$$

Auch hier lassen sich wieder alle  $S_{(x)}^{(g,i)}$  zu einem Vektor  $S_{(x)}^{(g)}$  zusammenfassen:

$$S_{(x)}^{(g)} = \int_0^x \begin{pmatrix} \Phi_{(x)}^{(M_y)} \\ \Phi_{(x)}^{(M_z)} \end{pmatrix} dx + \int_0^x \begin{pmatrix} \mathbb{M}_{(x)}^{(V_z)} \\ \mathbb{M}_{(x)}^{(V_y)} \end{pmatrix} dx \tag{5.33}$$

bzw.

$$S_{(x)}^{(g)} = \int_0^x \begin{pmatrix} \Phi_{(x)}^{(M_y)} \\ \Phi_{(x)}^{(M_z)} \end{pmatrix} dx + \int_0^x \int_0^x \begin{pmatrix} \Phi_{(x)}^{(V_z)} \\ \Phi_{(x)}^{(V_y)} \end{pmatrix} dx^2 \tag{5.34}$$

Man erkennt, dass in diesem Formalismus alle Schnittgrößen bloß Produkte von Differentialoperatoren  $dx$  mit diversen Lastfunktionen  $\Phi_{(x)}^{(i)}$  sind. Man kann also den Gesamtschnittgrößenvektor  $S(x)$  als ein Produkt des Lastfallvektors  $\Phi(x)$  mit einer Differentialoperatormatrix darstellen, welche wir  $\underline{dx}$  nennen.

$$\begin{pmatrix} dN_x(x) \\ dV_y(x) \\ dV_z(x) \\ dM_T(x) \\ dM_y(x) \\ dM_z(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & dx & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & dx & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx^2 & 0 & dx & 0 \\ 0 & dx^2 & 0 & 0 & 0 & dx \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Phi_{(x)}^{(N_x)} \\ \Phi_{(x)}^{(V_y)} \\ \Phi_{(x)}^{(V_z)} \\ \Phi_{(x)}^{(M_T)} \\ \Phi_{(x)}^{(M_y)} \\ \Phi_{(x)}^{(M_z)} \end{pmatrix} \tag{5.35}$$

bzw.

$$dS(x) = \underline{dx}\Phi(x) \quad (5.36)$$

Die Gesamtschnittkräfte ergeben sich dann natürlich als einfaches Integral:

$$S(x) = \int_0^x \underline{dx}\Phi(x) \quad (5.37)$$

Weiters macht es in diesem Formalismus noch Sinn den 2-dimensionalen Sonderfall zu betrachten. Da der Schnittgrößenvektor  $S(x)$  weniger Komponenten hat, reduziert sich auch die Zeilen- und Spaltenanzahl des Differentialoperators  $\underline{dx}$ , so dass sich Formel 5.36 als

$$\begin{pmatrix} dN_x(x) \\ dV_z(x) \\ dM_y(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx & 0 & 0 \\ 0 & dx & 0 \\ 0 & dx^2 & dx \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Phi_{(x)}^{(N_x)} \\ \Phi_{(x)}^{(V_z)} \\ \Phi_{(x)}^{(M_y)} \end{pmatrix} \quad (5.38)$$

liest. Formel 5.37, so wie alle anderen Zusammenhänge bezüglich gebundener und ungebundener Schnittgrößen bleiben natürlich wahr.

Zu beiden Formalismen sein noch gesagt, dass es selbstverständlich möglich ist, die Schnittkräfte nur über ein Intervall  $\Delta x$  zu berechnen, um eine Differenz der Schnittgrößen  $\Delta S$  zu erhalten. Definiert man  $\Delta x$  als

$$\Delta x = \{x | x_1 < x < x_2\},$$

so muss man für ungebundene Schnittgrößen im Summenformalismus lediglich die Summationsvariable auf  $x_1 < x_k < x_2$  definieren bzw. im Integrationsformalismus lediglich die Integrationsgrenzen als  $x_1$  und  $x_2$  setzen. Offensichtlicherweise wird dann bloß ein Relativwert bzw. eine Differenz berechnet. Würde man den Absolutwert wollen, so müsste man bei ungebundenen Schnittgrößen zu dieser

Differenz  $\Delta_{(x_1)}^{(x_2)} S_u$  noch den Absolutwert am Punkt  $x_1$  addieren:

$$S_{u,x_2} = S_{u,x_1} + \Delta_{(x_1)}^{(x_2)} S_u \quad (5.39)$$

Hierbei steht

- $S_{u,x_2}$  für die absolute ungebundene Schnittgröße am Punkt  $x_2$ ,
- $S_{u,x_1}$  für die absolute ungebundene Schnittgröße am Punkt  $x_1$
- und  $\Delta_{(x_1)}^{(x_2)} S_u$  für die Änderung der ungebundenen Schnittgröße zwischen den Punkten  $x_1$  und  $x_2$ .

Für gebundene Schnittgrößen, ist dagegen noch der Beitrag der korrespondierenden ungebundenen Schnittgröße, welche vor dem betrachteten Stababschnitt  $\Delta x$  einwirken zu berücksichtigen.  $S_g$  ergibt sich dann als

$$S_{g,x_2} = S_{g,x_1} + \Delta_{(x_1)}^{(x_2)} S_g + S_{\dot{u},x_1} \cdot \Delta x. \quad (5.40)$$

Hierbei ist

- $S_{g,x_2}$  die absolute gebundene Schnittgröße am Punkt  $x_2$ ,
- $S_{g,x_1}$  die absolute gebundene Schnittgröße am Punkt  $x_1$ ,
- $\Delta_{(x_1)}^{(x_2)} S_g$  die Änderung der gebundenen Schnittgröße zwischen  $x_1$  und  $x_2$ ,
- $S_{\dot{u},x_1}$  die absolute konjugierte ungebundene Schnittgröße am Punkt  $x_1$
- und  $\Delta x = x_2 - x_1$ .

Dieser Zusammenhang wird in Abschnitt 5.3.3 noch genau diskutiert und auch bewiesen. Hier sollte er nur einmal erwähnt werden.

Mit etwas Wissen über die Dirac-Delta- und Heaviside-Distribution erkennt man auch, dass beide Formalismen vom Rechenaufwand gleichwertig sind, da sich

jede integrierte Delta-Distribution wie ein einfacher Summand verhält und jede integrierte Heaviside-Distribution bloß wie ein Integral über einen begrenzten Definitionsbereich. Zur Kalkulation der Schnittgrößen sind also beide Formalismus absolut gleichwertig. Ein Unterschied wird erst später bei den auf Schnittkräften aufbauenden Berechnung, insbesondere den Verformungen, ersichtlich, da dann bei dem Integrationsformalismus die Integrationsgrenzen verfallen, was die Berechnung etwas weniger fehleranfällig macht.

### 5.3.3 Schnittgrößen an Ecken

Bis jetzt wurde stillschweigend angenommen, dass der Stab an dem die Schnittgrößen berechnet werden, perfekt geradlinig ist. In der Realität muss das natürlich nicht der Fall sein, weshalb wir den Rest unserer Behandlung von Schnittgrößen nun gekrümmten bzw. eckigen Tragwerken widmen. Da dies ausschließlich Probleme der Stabgeometrie und der Verschiebung der lokalen Koordinatensysteme sind, wird nicht mehr darauf eingegangen, wie Schnittgrößen berechnet werden, sondern das Ergebnis  $S$  der oben diskutierten Berechnung vorausgesetzt. Es sei nochmal erwähnt, dass es für die nun hergeleiteten Endresultate beliebig ist, welchen Formalismus man verwendet.

Zuerst sei einmal geklärt, was mit einer Ecke gemeint ist. Eine Ecke ist jede nicht infinitesimale Richtungsänderung eines Stabes, bzw. eine Anschluss von zwei Stäben, deren Stabachsen nicht auf einer Linie liegen. Weiters zählen auch Rotationen des Stabes um die Stabachse als Ecke. Obwohl dieser Begriff leicht erfassbar ist (da er mit der umgangssprachlichen Verwendung zusammenfällt) sollen in Abb. 5.12 noch einmal drei Abbildungen als Beispiele gebracht werden.

Das Problem der Schnittgrößenberechnung ist wie sich die Schnittgrößen ändern, wenn man von einer Seite der Ecke an die andere wechselt; also wie sich die Schnittgrößen unterscheiden, wenn man sich der Ecke von der einen Seite und dann von der anderen Seite nähert. Die Lösung dieses Problems ist eine Re-

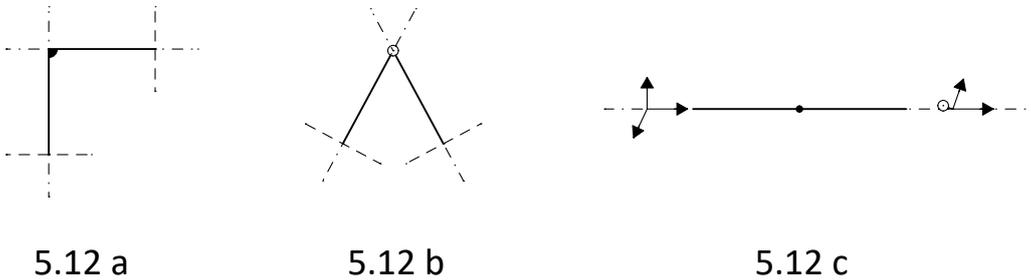


Abbildung 5.12: Beispiele für Ecken

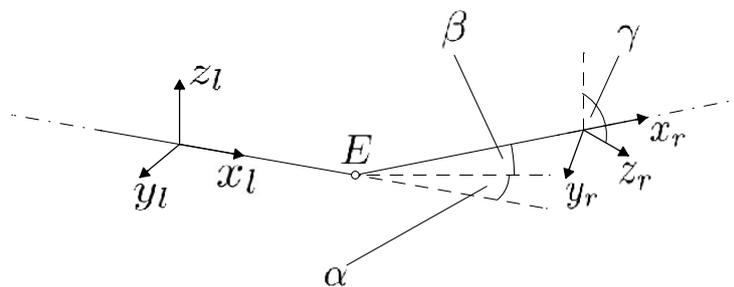


Abbildung 5.13: Winkel einer Koordinatentransformation des lokalen Koordinatensystems an einer Ecke

chenmethode um die Schnittgrößen an einer Seite der Ecke, in die Schnittgrößen der anderen Seite der Ecke umzurechnen.

Das Grundprinzip dieser Berechnung ist der Erhaltungssatz der Orientierung:

„Kraftgrößen behalten immer ihre Richtung.“

Das bedeutet, dass eine Kraftgröße, welche im globalen Koordinatensystem in  $x$ ,  $y$  oder  $z$ -Richtung zeigt, immer diese Orientierung beibehalten wird, egal um welchen Punkt man das Gleichgewicht bildet. Schnittgrößen ändern sich also nicht, weil sich ihre Orientierung an Ecken ändert, sondern nur, weil sich die Orientierung des lokalen Koordinatensystems ändert, in dem die Schnittkräfte beschrieben werden. Das Prozedere der Neuorientierung von lokalen Koordinatensystem nennt man Koordinatentransformation.

Wie aus Abbildung 5.13 ersichtlich ist, ist diese Transformation eine reine Rotation um den Eckpunkt  $E$ . Eine solche Rotation kann durch drei unabhängige

Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  dargestellt werden. Der Winkel  $\alpha$  symbolisiert die Rotation um die lokale  $z$ -Achse, der Winkel  $\beta$  um die lokale  $y$ -Achse und der Winkel  $\gamma$  um die lokale  $x$ -Achse. Jede dieser Rotationen wird durch eine eigene Drehmatrix beschrieben:

- $\underline{A}$  beschreibt die Rotation um  $\alpha$ ,
- $\underline{B}$  beschreibt die Rotation um  $\beta$ ,
- und  $\underline{C}$  beschreibt die Rotation um  $\gamma$ .

Das Ziel dieser Matrizen ist das lokale Koordinatensystem links der Ecke  $x_l, y_l, z_l$  in das lokale Koordinatensystem rechts der Ecke  $x_r, y_r, z_r$  umzuwandeln. Wie alle Matrizenoperationen ist auch diese Rotation nicht kommutativ, weswegen eine strenge Abfolge einzuhalten ist:

$$\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{pmatrix} = \underline{CBA} \begin{pmatrix} x_l \\ y_l \\ z_l \end{pmatrix} \quad (5.41)$$

Mit dieser Abfolge ergibt sich auch eine spezielle Art, die Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  zu messen, welche in Abb. 5.13 zu sehen ist.  $\alpha$  misst den Winkel, den die (komplett) rotierte Stabachse projiziert auf das  $x_l$ - $y_l$ -Feld mit der nicht rotierten Stabachse einschließen würde.  $\beta$  misst dann von Winkel zwischen der, nun schon einmal um  $\alpha$  rotierten, Stabachse mit der fertig rotierten Stabachse. Der Winkel  $\gamma$  beschreibt dann bloß die Rotation um die Stabachse, wenn diese schon in ihre Endlage rotiert wurde.

Die Matrizen entsprechen den Euler-Matrizen für beliebige Rotationen und sind

folgendermaßen aufgebaut:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.42)$$

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{pmatrix} \quad (5.43)$$

$$\underline{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) \\ 0 & \sin(\gamma) & \cos(\gamma) \end{pmatrix} \quad (5.44)$$

Da Matrizen assoziativ sind, können alle diese Matrizen in einer Gesamttrotationsmatrix  $\underline{R}$  zusammengefasst werden, welche sich als

$$\underline{R} = \begin{pmatrix} \cos(\beta) \cos(\alpha) & -\cos(\beta) \sin(\alpha) & \sin(\beta) \\ \cos(\gamma) \sin(\alpha) + \sin(\gamma) \sin(\beta) \cos(\alpha) & \cos(\gamma) \cos(\alpha) - \sin(\gamma) \sin(\beta) \sin(\alpha) & -\sin(\gamma) \cos(\beta) \\ \sin(\gamma) \sin(\alpha) - \cos(\gamma) \sin(\beta) \cos(\alpha) & \cos(\gamma) \sin(\beta) \sin(\alpha) + \sin(\gamma) \cos(\alpha) & \cos(\gamma) \cos(\beta) \end{pmatrix} \quad (5.45)$$

ergibt. Die Koordinatentransformation schreibt sich dann als:

$$\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{pmatrix} = \underline{R} \begin{pmatrix} x_l \\ y_l \\ z_l \end{pmatrix} \quad (5.46)$$

Wie bekannt, ist eine Koordinatentransformation bloß eine Transformation der Basisvektoren  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  und  $\hat{z}$  des Koordinatensystems, welches man untersucht. Sie gelte dann für jegliches Objekt, welches sich aus diesen Basisvektoren modellieren

ließe.

Wir können unsere Schnittgrößen ebenfalls aus solchen Basisvektoren zusammengesetzt sehen. Da diese Basisvektoren per Definition gleich gerichtet sind, wie jene des lokalen Koordinatensystems, können für sie dieselben Transformationen bzw. Operationen verwendet werden. Somit kann man die Matrix  $\underline{R}$  für jeglichen Schnittgrößenvektor verwenden, dessen Komponenten in  $x$ ,  $y$  und  $z$ -Richtung zeigen. Dafür bieten sich die Vektoren

$$F_S = \begin{pmatrix} N_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad M_S = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}$$

an. Sind also  $F_{S,l}$  und  $M_{S,l}$  die Schnittgrößen links vom betrachteten Eckpunkt, so ergeben sich die Schnittgrößen  $F_{S,r}$  und  $M_{S,r}$  rechts vom Eckpunkt als:

$$F_{S,r} = \underline{R}F_{S,l} \quad (5.47)$$

$$M_{S,r} = \underline{R}M_{S,l} \quad (5.48)$$

Selbstverständlich lässt sich auch eine Gesamtschnittgrößenrotationsmatrix  $\underline{G}$  vorstellen, welcher den Gesamtschnittgrößenvektor  $S$  transformiert:

$$S_r = \underline{G}S_l \quad (5.49)$$

Es ist leicht vorstellbar wie diese Matrix aufgebaut sein muss. Auf ihre Darstellung wird aus Platzgründen verzichtet.

Für den Fall, dass direkt an der Ecke noch Schnittkräfte einwirken, kann ein Schnittgrößenvektor  $S_E$  eingezeichnet werden, womit sich

$$S_r = \underline{G}S_l + S_E \quad (5.50)$$

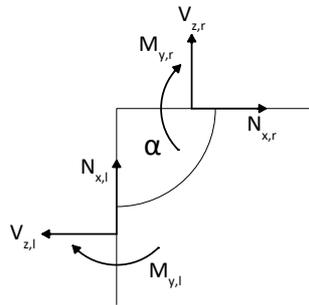


Abbildung 5.14: Schnittgrößentransformation an einer 2-dimensionalen Ecke

ergibt. Hier wird vorausgesetzt, dass  $S_E$  die Schnittgrößen bereits im lokalen Koordinatensystem  $x_r, y_r, z_r$  beschreibt. Ist dies nicht der Fall, so muss auch dieser Schnittgrößenvektor mit seiner eigenen Gesamtrationsmatrix  $\underline{G}_E$  multipliziert werden, wobei alle Winkel dieser Matrix natürlich von dem Koordinatensystem von  $S_E$  aus gemessen werden.

Zuletzt sei noch der Sonderfall einer 2-dimensionalen Ecke angerissen: In einer wie in Abb. 5.14 dargestellten 2-dimensionalen Ecke gibt es nur einen Winkel  $\alpha$  bzw. nur eine Rotation um eine Achse, welche im Standardfall die  $y$ -Achse ist. Dementsprechend ergibt sich die Rotationsmatrix  $\underline{R}$  als

$$\underline{R} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.51)$$

und die Schnittgrößentransformation als

$$\begin{pmatrix} N_{x,r} \\ V_{z,r} \\ M_{y,r} \end{pmatrix} = \underline{R} \begin{pmatrix} N_{x,l} \\ V_{z,l} \\ M_{y,l} \end{pmatrix}. \quad (5.52)$$

Eine nette Konsequenz dieser Rotation um bloß eine Achse ist, dass das Moment

um die  $y$ -Achse über 2-dimensionale Ecken unverändert bleibt.

### Schnittgrößenfunktionen an Ecken

Die Koordinatentransformation macht es (praktisch) unmöglich Schnittgrößenfunktionen über Ecken zu führen. Es ist daher zu raten, zwei durch ein Eck verbundene Stäbe (auch wenn sie technisch gesehen bloß ein Stab sind) statisch auch wirklich als zwei getrennte Stäbe zu behandeln.

Die Schnittgrößen nach der Ecke werden so mit

$$S_x = S_E + \Delta_E^x S \quad (5.53)$$

berechnet, wobei

- $S_x$  die Schnittgrößen am Punkt  $x$  sind.
- $S_E$  die Schnittgrößen am Eckpunkt  $E$  sind.
- $\Delta_E^x S$  die Veränderung der Schnittgrößen zwischen den Punkten  $E$  und  $x$  ist.

Für ungebundene Schnittgrößen ergibt sich  $\Delta_E^x S$  einfach als

$$S_{u,x} = \Phi_{u,x} \quad (5.54)$$

bzw. als

$$S_{(x)}^{(u)} = \int_0^x \Phi_{(x)}^{(u)} dx, \quad (5.55)$$

Da man den Stabteil nach der Ecke als eigenen Stab betrachtet, wird bei der Berechnung von  $\Delta_E^x S$  der Eckpunkt  $E$  als 0-Punkt von  $x_r \hat{=} x$  definiert, weshalb man Formeln 5.54 und 5.55 als Formeln für  $S_{(x)}^{(u)}$  und nicht für  $\Delta_E^x S$  anschreibt. Etwas komplizierter wird dies jedoch für gebundene Schnittgrößen, da hier der Beitrag der korrespondierenden ungebundenen Schnittgrößen des vorhergehenden

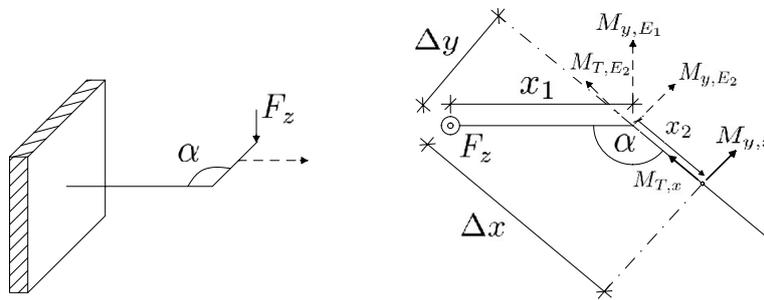


Abbildung 5.15: Ecke unter Erhaltung der Querkraftbelastung

Stabteils auch berücksichtigt werden muss.  $\Delta_E^x S$  ergibt sich als

$$S_{g,x} = \Phi_{g,x} + M_{\ddot{u},x} + S_{\ddot{u},E} \cdot \Delta x \quad (5.56)$$

wobei  $\Delta x$  der Abstand von der Ecke bis zu betrachteten Punkt  $x$  ist und  $S_{\ddot{u},E}$  die konjugierten ungebundenen Schnittgrößen am Eckpunkt  $E$ , bzw.

$$S_{(x)}^{(g)} = \int_0^x \Phi_{(x)}^{(g)} dx + \int_0^x M_{(x)}^{(\ddot{u})} dx + S_{(0)}^{(\ddot{u})} \cdot x. \quad (5.57)$$

Zur Erklärung dieses Zusammenhangs betrachten wir die Abbildungen 5.15 und 5.16. Sie stellen die beiden Fälle da, die wir betrachten um die Formeln 5.56 bzw. 5.57 zu beweisen:

- Die Querkraftbelastung bleibt bei der Transformation erhalten.
- Die Momentenbelastung bleibt bei der Transformation erhalten.

In Abbildung 5.15 sehen wir ein ebenes Stabstück in der 3. Dimension und lassen es durch die Kraft  $F_z$  belastet sein. In der Skizze ist  $\alpha$  zur Übersichtlichkeit mit  $90^\circ$  eingezeichnet, er kann aber natürlich jede beliebige Größe haben. Diese Kraft verursacht ein Moment  $M_{y,E_1}$ , welches an der Ecke in ein Moment  $M_{T,E_2}$  und  $M_{y,E_2}$  transformiert wird.

Gehen wir nun die lokale  $x_2$ -Achse weiter, so steigt der Abstand  $\Delta x$  linear, womit

auch das Moment  $M_{y,x}$  linear zunimmt. Der Abstand  $\Delta_y$  bleibt aber konstant und mit ihm auch das Moment  $M_x$ . Wir erhalten

$$\begin{aligned}
 M_x &= F_z \cdot \Delta y \\
 &= F_z \cdot x_1 \cdot \cos(\alpha) \\
 &= M_{y,E_1} \cdot \cos(\alpha) \\
 &= M_{x,E_2}
 \end{aligned} \tag{5.58}$$

und

$$\begin{aligned}
 M_y &= F_z \cdot \Delta x \\
 &= F_z \cdot (x_1 \sin(\alpha) + x_2) \\
 &= F_z \cdot x_1 \sin(\alpha) + F_z \cdot x_2 \\
 &= M_{y,E_1} \cdot \sin(\alpha) + F_z \cdot x_2 \\
 &= M_{y,E_2} + F_z \cdot x_2
 \end{aligned} \tag{5.59}$$

Jetzt wissen wir aber, dass  $V_{z,E_2} = V_{z,E_1} = F_z$ , so dass wir  $M_y$  als

$$M_y = M_{y,E_2} + V_{z,E_2} \cdot x_2 \tag{5.60}$$

schreiben können.

Weiters betrachten wir ein ebenes Stabeck, welches nun jedoch in einer Ebene mit der Belastung  $F_z$  liegt, wie in Abbildung 5.16 dargestellt. Dieses verursacht ein Moment  $M_y$ , welches aus der Zeichenebene herausstehen würde. Im Vergleich zum Beispiel 5.15 bleibt hier jedoch das Moment bei der Koordinatentransformation erhalten. In diesem Fall nimmt der Abstand  $\Delta e_x$  nicht im Maßstab 1 : 1 mit der Stablänge zu, sondern abhängig vom Winkel mit

$$\Delta e_x = x_1 + \Delta x_2 \cdot \cos(\alpha) \tag{5.61}$$

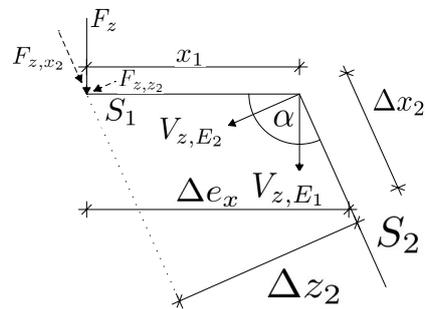


Abbildung 5.16: Ecke unter Erhaltung der Momentenbelastung

und somit

$$\begin{aligned} M_y &= F_z \cdot (x_1 + \Delta x_2 \cos(\alpha)) \\ &= M_{y,E} + F_z \Delta x_2 \cos(\alpha) \end{aligned} \quad (5.62)$$

Wenn wir jedoch den Blickwinkel des Stabes  $S_2$  annehmen, können wir die Kraft  $F_z$  in  $F_{z,z_2}$  und  $F_{z,x_2}$  zerlegen, so dass deren Normalabstände wieder gleich wie die Stablänge  $x$  zunehmen. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned} M_y &= F_{z,x_2} \cdot \Delta z_2 + F_{z,z_2} \cdot \Delta x_2 \\ &= F_z \sin(\alpha) \cdot \Delta z_2 + F_z \cos(\alpha) \cdot \Delta x_2. \end{aligned} \quad (5.63)$$

Aus der Geometrie erkennt man, dass  $x_1 = \Delta z_2 \cdot \sin(\alpha)$ , was eingesetzt wieder

$$M_y = M_{y,E} + F_z \Delta x_2 \cos(\alpha) \quad (5.64)$$

ergibt. Jetzt wissen wir aber, dass  $F_z$  nichts weiter ist, als  $V_{z,E_1}$  und dass  $V_{z,E_2} = V_{z,E_1} \cdot \cos(\alpha)$ . Es ergibt sich also

$$M_y = M_{y,E} + V_{z,E_2} \cdot \Delta x_2, \quad (5.65)$$

was ident ist mit Formel 5.60. Da sowohl eine Rotation um die  $z$ -, als auch

um die  $y$ -Achse dasselbe Ergebnis liefern und eine Rotation um die  $x$ -Achse die gebundenen Schnittgrößenfunktionen nicht verändern kann<sup>12</sup>, ist die Formel

$$S_{g,x} = S_{g,E} + S_{\ddot{u},E} \cdot \Delta x \quad (5.66)$$

allgemeingültig für alle Ecken. Hierbei steht

- $S_{g,x}$  für den gebundene Schnittgrößenvektor am Punkt  $x$ .
- $S_{g,E}$  für den gebundenen Schnittgrößenvektor am Eckpunkt  $E$  beschrieben im Koordinatensystem des betrachteten Stabes.
- $S_{\ddot{u},E}$  für dem korrespondierende ungebundene Schnittgrößenvektor am Eckpunkt  $E$  beschrieben im Koordinatensystem des betrachteten Stabes.
- $x$  für die Stablänge gemessen vom Eckpunkt  $E$  ausgehend.

Tritt zusätzlich noch eine Belastung am betrachteten Stab nach der Ecke auf, so ist in Formel 5.66 noch der auftretende Lastfall zu berücksichtigen. Es gilt

$$S_{g,x} = S_{g,E} + \Phi_{g,x} + \mathbb{M}_{\ddot{u},x} + S_{\ddot{u},E} \cdot \Delta x \quad (5.67)$$

wobei  $\Phi_{g,x} + \mathbb{M}_{\ddot{u},x} + S_{\ddot{u},E} \cdot x$  meist als  $\Delta_E^x S$  zusammengefasst wird.

Zuletzt soll auch noch klar betont werden, dass Formel 5.67 allgemeingültig ist für jeden beliebig Lastfall des dem Knoten vorhergehenden Stabteils, auch wenn wir in unserer vereinfachten Betrachtung nur von einer Einzellast ausgegangen sind.

Dies kann dadurch begründet werden, dass in den vorhergehenden Überlegungen  $F_z \cdot x_1$  durch  $\sum_i (\Phi_{z,i} \cdot \Delta x_{1,i})$  und  $F_z \cos(\alpha) \cdot \Delta x_2$  durch  $\sum_i (\Phi_{z,i} \cos(\alpha) \cdot \Delta x_2)$

<sup>12</sup>Bei einer Rotation um die  $x$ -Achse, werden weder Querkräfte in Normalkräfte umgewandelt (sie bleiben also erhalten), noch der Anstieg der Normalabstände mit der der Stablänge verändert. Alles was passiert ist eine Umverlagerung von  $M_y$  zu  $M_z$  und umgekehrt.

ersetzt werden könnte, ohne dass sich die Argumentation entscheidend ändert. Auch dann wird sich der erste Term als  $M_{yE}$  und der zweite Term als  $V_z \cdot E \cdot \Delta x_2$  ergeben. In diesem Absatz stehen  $\Phi_{z,i}$  für beliebige Einzellasten des dem Knoten vorhergehenden Stabteils (wobei darauf hingewiesen sein, dass Linienlasten in Einzellasten umgewandelt werden können) und  $\Delta x_{1,i}$  für den Abstand der Einzellast  $\Phi_{z,i}$  bis zum Eckpunkt  $E$ .

Weiter sei noch angemerkt, dass natürlich aus Symmetriegründen alle Überlegungen in denen die Lastrichtung  $z$  angenommen wurde auch für Lastrichtung  $y$  gelten.

### 5.3.4 Gabelungen

Gabelungen sind Anschlüsse von drei oder mehr Stäben. Die Übertragung von Schnittgrößen an Gabelungen ist besonders kompliziert, da sich in ihnen Probleme der Geometrie sowie Probleme des Gleichgewichts vereinen.

Für grundlegende Überlegungen betrachten wir die in Abb. 5.17 dargestellte Gabelung aus drei Stabteilen in einer Ebene. Aus Abschnitt 5.3.1 wissen wir, dass in der Ebene, Dank drei vorhandenen Gleichgewichtsbedingungen, nur nach drei Schnittkräften gelöst werden kann. Es ist offensichtlich, dass in dem dargestellten Fall der Abb. 5.17 an zwei Schnittufern alle Kraftgrößen bekannt sein müssen, um jene im dritten Schnittufer zu berechnen.

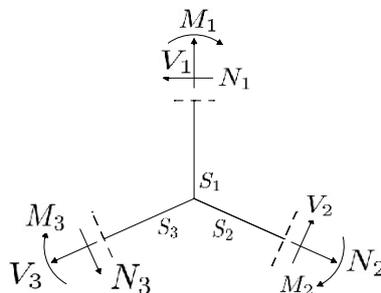


Abbildung 5.17: Gabelung mit Schnittgrößen

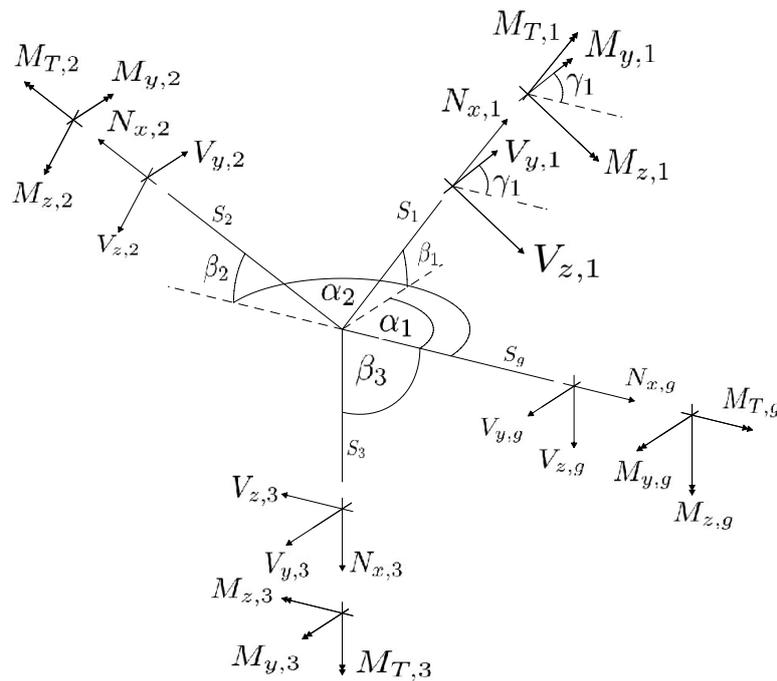


Abbildung 5.18: Gabelung mit Winkel und Schnittgrößen

Verallgemeinert lässt sich sagen, dass an einer Gabelung immer nur die Schnittkräfte an einem Schnittpunkt unbekannt sein dürfen, um eine Lösung für das Gleichgewicht an dieser Gabelung erhalten zu können.

Für dessen Ermittlung ist jedoch noch die Gabelungsgeometrie, ähnlich wie in der Ausführung über Ecken zu berücksichtigen. Man kann das Gleichgewicht erst bilden, wenn man alle Schnittgrößen in einem Koordinatensystem vereinigt hat. Dieses ist im Wesentlichen beliebig, es bietet sich aber jenes des noch unberechneten Schnittpunktes an. Die erste Aufgabe ist also die Koordinatentransformation aller lokalen Koordinatensysteme der einzelnen Stäbe in jenes des gesuchten Stabes. Dies kann durch die inverse Rotationsmatrix  $\underline{R}^{-1}$  erreicht werden. Der Vorteil bei Verwendung dieser Matrix ist, dass alle Winkel in gewohnter Manier vom gesuchten Stab aus gemessen werden können (Siehe Abbildung 5.18) und man sich so nicht mit mehreren Winkeldefinitionen (von mehreren Stabachsen aus) beschäftigen muss.  $\underline{R}^{-1}$  ergibt sich als

$$\underline{R}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\beta) \cos(\alpha) & \cos(\gamma) \sin(\alpha) + \sin(\gamma) \sin(\beta) \cos(\alpha) & -\cos(\gamma) \sin(\beta) \cos(\alpha) + \sin(\gamma) \sin(\alpha) \\ -\cos(\beta) \cos(\alpha) & \cos(\gamma) \cos(\alpha) - \sin(\gamma) \sin(\beta) \sin(\alpha) & \cos(\gamma) \sin(\beta) \sin(\alpha) + \sin(\gamma) \cos(\alpha) \\ \sin(\beta) & -\sin(\gamma) \cos(\beta) & \cos(\gamma) \cos(\beta) \end{pmatrix} \quad (5.68)$$

bzw. in der zweiten Dimension als:

$$\underline{R}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.69)$$

und somit die Gleichgewichtsbedingungen als:

$$0 = S_g + \sum_i S_i \underline{G}_i^{-1} + S_G \quad (5.70)$$

Hierbei stehen

- $S_g$  für den Schnittgrößenvektor des gesuchten Stabes.
- $S_i$  für den Schnittgrößenvektor im Stab  $i$ .
- $\underline{G}_i^{-1}$  für die inverse Gesamtschnittgrößenrotationsmatrix aus dem Stab  $i$  in den Stab  $g$ . Wir haben hier den Schritt von  $\underline{R}^{-1}$  zu  $\underline{G}^{-1}$  der Kompaktheit halber direkt vollzogen, unter der Annahme, dass bekannt ist, wie man von  $\underline{R}^{-1}$  zu  $\underline{G}^{-1}$  gelangt.
- $S_G$  für die Schnittgrößen, welche eventuell exakt an der Gabelung einwirken. Auch hier wird vorausgesetzt, dass  $S_G$  die Schnittgrößen im lokalen Koordinatensystem  $g$  beschreibt.

Da die Vorzeichen von der gewählten Vorzeichendefinition abhängen, diese jedoch beliebig ist, ergibt sich  $S_g$  als:

$$S_g = \sum_i S_i \underline{G}_i^{-1} + S_G \quad (5.71)$$

### Sonderfall einer einzigen unbekanntem Schnittgröße

Bis jetzt wurde das Problem behandelt, dass an einem Schnittpuffer alle Schnittgrößen unbekannt sind. Es gibt jedoch Fälle in der Baustatik, in denen nur eine Schnittgröße unbekannt ist; meistens weil es nur eine Schnittgröße gibt. Das berühmteste Beispiel Systeme dieser Art sind Fachwerke: Stabtragwerke, in denen es nur Normalkräfte gibt.

In einem Problem wie diesem können tatsächlich zwei bzw. drei Schnittpuffer unbekannt sein. Der Grund dafür ist, dass die Anzahl der Gleichgewichtsbedingungen hier nicht gleich der Anzahl der Schnittgrößen pro Querschnitt ist, jede Gleichgewichtsbedingung jedoch eine Unbekannte berechenbar macht.

Zuerst definiert man extra für die Gabelung ein lokales Koordinatensystem, welches wir mit  $x_G$ ,  $y_G$  und  $z_G$  bezeichnen werden. Nun macht man sich zu Nutzen, dass man Kräfte immer in drei Komponenten aufspalten kann. Wir transformieren also die Normalkräfte jedes anschließenden Stabes in das Koordinatensystem der Gabelung. Nun kann man mithilfe derer Gleichgewichtsbedingungen

$$\begin{aligned}\sum_i F_{x_G,i} &= 0 \\ \sum_i F_{y_G,i} &= 0 \\ \sum_i F_{z_G,i} &= 0\end{aligned}\tag{5.72}$$

ein lineares Gleichungssystem bilden, welches man auf drei Unbekannte lösen kann. Die Gleichgewichtsbedingungen

$$\sum_i M_{T_g,i} = 0 \quad \sum_i M_{y_g,i} = 0 \quad \sum_i M_{z_g,i} = 0$$

können nicht verwendet werden, da Normalkräfte keine Momente erzeugen. Die Transformation der Normalkräfte kann wieder über die inverse Rotationsmatrix  $\underline{R}^{-1}$  erfolgen, oft wird jedoch auch einfach eine intuitive Herangehensweise gewählt, in der man jeden Term der obigen Gleichgewichtsbedingungen durch einzelnes Nachvollziehen der zugehörigen Winkelfunktionen ermittelt<sup>13</sup>.

<sup>13</sup>Damit ist das in der Praxis gebräuchliche Verfahren gemeint, indem die Komponenten einer

Da in der 2. Dimension eine Gleichgewichtsbedingung entfällt, können hier nur zwei Schnittufer unbekannt sein, ansonsten ist der Rechengang jedoch ident.

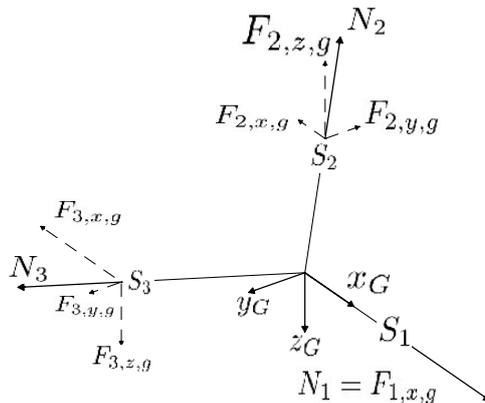


Abbildung 5.19: Gabelung mit nur einer Schnittgröße

### 5.3.5 Schnittgrößen an gekrümmten Stäben

Da nun unsere Betrachtung für Stäbe mit nicht infinitesimaler Richtungsänderung abgeschlossen ist, können wir uns den letzten verbleibenden Stabgeometrien zuwenden:

Stäben mit infinitesimalen Richtungsänderungen, also gekrümmte Stäbe.

Bei ihnen tritt das Problem auf, dass die Transformation des lokalen Koordinatensystems keine einmalige Operation mehr ist, sondern tiefer kontinuierlicher Charakter des Stabes. Dies drückt sich vor allem dadurch aus, dass sich auch die Lastorientierung kontinuierlich ändert, was zur Folge hat, dass man Linienlasten nicht einfach mehr aufintegrieren kann. Intuitiv würde man einen Einsatz ähnlich dem Folgenden wählen,

$$S_x = \underline{dR}S_{x-dx} + dS \quad (5.73)$$

indem sich die Schnittgrößen an einem Punkt aus den Schnittgrößen am vorherigen Punkt, multipliziert mit einer infinitesimalen Verdrehungsmatrix, plus den

---

Normalkraft durch einfache Multiplikation mit Winkelfunktionen ermittelt werden, wobei sich diese Winkelfunktionen nicht aus formalen Rechenoperationen sondern aus einfachen logischen Überlegungen ergeben.

Schnittgrößenanteil am betrachteten Punkt ergeben. Versucht man jedoch Formel 5.73 zu einem Rechenalgorithmus zu konkretisieren, so verliert man sich in einem komplizierten Ensemble aus Vektoranalysis und geometrischen Zusammenhängen, weshalb wir hier einen einfacheren und eleganteren Ansatz ausführen wollen: Der Schnittgrößenberechnung in einem globalen Koordinatensystem.

Diese Berechnung erfolgt nach folgendem Grundmuster:

1. Man definiert ein globales (oder überlokales) Koordinatensystem und orientiert alle Lasten an diesem. Einzellasten werden also in die ihre Komponenten entlang des globalen Koordinatensystems aufgespalten, Linienlasten zwar als Funktionen der lokalen  $x$ -Achse definiert, jedoch immer so, dass sie nach dem globalen Koordinatensystem gerichtet sind (die Krafrichtung einer Linienlast also fixiert bleibt).
2. Man addiert die Lasten nach gewohnter Manier der beiden in Abschnitt 5.3.2 erläuterten Formalismen.
3. Abschließend transformiert man die Schnittkräfte vom globalen ins lokale Koordinatensystem des betrachteten Punktes.

Hierfür müssen nun folgende mathematische Objekte definiert werden:

Zuerst benötigen wir eine Funktion, welche die Lage jedes Punktes im (globalen) Raum angibt. Dafür definieren wir drei Funktionen  $K_X(x)$ ,  $K_Y(x)$  und  $K_Z(x)$ , wobei jede Funktion für jeden Punkt  $x$  der lokalen Stabachse den zugehörigen Wert  $X$ ,  $Y$  oder  $Z$  angibt, an dem dieser Punkt im globalen Koordinatensystem liegt.

Sie werden im Vektor

$$K(x) = \begin{pmatrix} K_X(x) \\ K_Y(x) \\ K_Z(x) \end{pmatrix} \quad (5.74)$$

zusammengefasst.

In gleicher Manier modellieren wir Funktionen  $\alpha(x)$ ,  $\beta(x)$  und  $\gamma(x)$ , welche die Verdrehungswinkel  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  gemessen zwischen dem globalen und dem lokalen Koordinatensystem des betrachteten Punktes  $x$  angeben. Sie können in die

Winkelfunktionen der Rotationsmatrix  $\underline{R}$  eingesetzt werden, so dass sich eine Rotationsmatrixfunktion  $\underline{R}(x)$  ergibt.

Als neuer Index werden die Bezeichnung  $gl$  für global und  $lo$  für lokal eingeführt. Sie werden ganz zuletzt geschrieben und geben an in welchem Koordinatensystem die Größe beschrieben wird. So liest sich zum Beispiel der Schnittkraftvektor beschrieben im lokalen Koordinatensystem am Punkt  $x$  als  $F_{s,x,lo}$ . Äquivalent kann natürlich mit allen Vektoren vorgegangen werden. Einzig und allein beim Koordinatenvektor  $K(x)$  ist dies nicht notwendig, da er immer global gemessen wird.

Kraftgrößen, welche an einem Punkt einwirken (also technisch gesehen eine Kraft sind), werden als Vektor

$$E_{k,gl} = \begin{pmatrix} E_{X,k} \\ E_{Y,k} \\ E_{Z,k} \end{pmatrix} \quad (5.75)$$

angeschrieben.  $E$  steht in Anlehnung an EN 1990 für eine beliebige Einwirkung und ist je nachdem ob es sich um Einzelkräfte oder Einzelmomente handelt mit  $Q$  oder  $M$  zu substituieren. Der Index  $k$  nummeriert alle Einzellasten als Laufindex durch. Lasten werden allgemein immer im globalen Koordinatensystem gemessen, weshalb die Elemente des Vektors  $X$ ,  $Y$  und  $Z$  als Index tragen. Der Punkt an dem die Last  $E_k$  einwirkt, wird als  $x_k$  bezeichnet. Die Koordinaten dieses Punktes sind gleich den Koordinaten des Kraftvektors.

Linienlasten werden wie gewohnt als Funktionen nach der lokalen  $x$ -Achse als

$$e_{(x)}^{(k,gl)} = \begin{pmatrix} e_{(x)}^{(X,k)} \\ e_{(x)}^{(Y,k)} \\ e_{(x)}^{(Z,k)} \end{pmatrix} \quad (5.76)$$

definiert. Auch hier steht  $e$  wieder für eine beliebige Einwirkung und ist je nach Fall durch  $q$  oder  $m$  zu ersetzen.  $k$  nummeriert alle Linienlasten als Laufindex durch. Wie gehabt kann sie in eine äquivalente Einzellast umgerechnet werden,

welche sich mit

$$E_{k,gl} = \int_{x_k}^{x_m} e_{(x)}^{(k,gl)} dx \quad (5.77)$$

berechnet, wobei  $x_k$  der Anfangspunkt der Linienlast und  $x_m$  der Endpunkt der Linienlast ist. Sie wirkt am Punkt

$$K_{S,k} = \begin{pmatrix} X_{S,k} \\ Y_{S,k} \\ Z_{S,k} \end{pmatrix} = \frac{\int_{x_k}^{x_m} e_{(K(x))}^{(k,gl)} K(x) dx}{\int_{x_k}^{x_m} e_{(K(x))}^{(k,gl)}} \quad (5.78)$$

ein. Der Punkt  $K_k$  muss nicht Teil des Stabes sein.

Zur Wiederholung seien nochmal der Schnittkraft- und Schnittmomentvektor angeführt:

$$F_{S,x} = \begin{pmatrix} N_{x,x} \\ V_{y,x} \\ V_{z,x} \end{pmatrix} \quad M_{S,x} = \begin{pmatrix} M_{T,x} \\ M_{y,x} \\ M_{z,x} \end{pmatrix}$$

Der zweite Index  $x$  gibt wie bekannt an, an welchem Punkt  $x$  die Schnittgröße liegt.

Die obigen Formulierungen für  $E_{k,gl}$ ,  $F_{S,x}$  und  $M_{S,x}$  sind alles Formulierungen nach dem Summenformalismus. Selbstverständlich kann jedoch auch eine Formulierung nach dem Funktionsformalismus erfolgen. Wir werden in der nun kommenden Ausführung immer Formeln beider Formalismen anschreiben. Es wird jedoch darauf verzichtet hinzuweisen, welche zu welchem Formalismus gehört, da davon ausgegangen wird, dass der Leser dies von allein erkennt. In den folgenden Betrachtungen wird nun nicht mehr zwischen gebundenen und ungebundenen Schnittgrößen unterschieden, stattdessen aber zwischen Kräften und Momenten.

Der Schnittkraftvektor  $F_{S,lo}$  ergibt sich für den Punkt  $x$  als

$$F_{S,x,lo} = \underline{R(x)} \cdot \Phi_{F,x,gl} = \underline{R(x)} \left( \sum_{x_k < x} Q_{k,gl} + \sum_{x_k < x} \int_{x_k}^{\min(x_m, x)} q_{(x)}^{(k,gl)} \right) \quad (5.79)$$

bzw. als

$$F_{(x)}^{(S,lo)} = \underline{R(x)} \cdot \int_0^x \Phi_{(x)}^{(F,gl)} = \underline{R(x)} \left( \int_0^x \sum_k Q_{(x)}^{(k,gl)} \delta(x_k) dx + \int_0^x \sum_k q_{(x)}^{(k,gl)} W_{(x_k, x_m)}^{(\delta)} \right). \quad (5.80)$$

Der Schnittmomentvektor  $M_{S,lo}$  für den Punkt  $x$  muss nun neben der Lastfunktion  $\Phi_{M,x}$  noch der Beitrag von  $\mathbb{M}_{F,x}$  berücksichtigt werden. Es ergibt sich dann

$$\begin{aligned} M_{S,x,lo} &= \underline{R(x)} \cdot (\Phi_{M,x,gl} + \mathbb{M}_{F,x,gl}) \\ &= \underline{R(x)} \left( \sum_{x_k < x} M_{k,gl} + \sum_{x_k < x} \int_{x_k}^{\min(x_m, x)} m_{(x)}^{(k,gl)} dx \right. \\ &\quad \left. + \sum_{x_k < x} Q_{k,gl} \times (K(x) - K(x_k)) + \sum_{x_k < x} \int_{x_k}^{\min(x_m, x)} q_{(x)}^{(k,gl)} dx \times (K(x) - K(x_k)) \right) \end{aligned} \quad (5.81)$$

bzw. als

$$\begin{aligned} M_{(x)}^{(S,lo)} &= \underline{R(x)} \left( \int_0^x \Phi_{(x)}^{(M,gl)} dx + \int_0^x \mathbb{M}_{(x)}^{(F,gl)} dx \right) \\ &= \underline{R(x)} \left( \int_0^x \sum_k M_{(x)}^{(k,gl)} \delta(x_k) dx + \int_0^x \sum_k m_{(x)}^{(k,gl)} W_{(x_k, x_m)}^{(\delta)} dx \right. \\ &\quad \left. + \sum_k \left( \int_0^x Q_{(x)}^{(k,gl)} \delta(x_k) dx \times (K(x) - K(x_k)) \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_k \left( \int_0^x q_{(x)}^{(k,gl)} W_{(x_k, x_m)}^{(\Delta)} dx \times (K(x) - K_{(S,k)}) \right) \right). \end{aligned} \quad (5.82)$$

Mit diesen Formeln wollen wir unsere Überlegungen über Schnittgrößenverläufe in Stäben beenden. Wir sind nun in der Lage Schnittgrößenverläufe in jedem beliebigen Stab zu beschreiben und damit auch nahezu alle daraus aufbaubaren Stabtragwerke. Einzig und alleine Trägerroste und verwandte Tragwerke sind damit nicht kalkulierbar. Ihnen wird jedoch noch ein eigener Abschnitt gewidmet, um ihre Problematik gesondert anzusprechen.

### 5.3.6 Schnittgrößenverläufe

Um einen besseren Überblick über Schnittgrößen (insbesondere die Orte deren Maxima) zu haben, stellt man deren Verläufe graphisch in Abhängigkeit von der lokalen  $x$ -Achse da. Konventionellerweise orientiert man den 0-Punkt (als Stabanfang) links und die ansteigende  $x$ -Achse von dort nach rechts weglaufend. Die geometrische (globale) Form des Stabes wird jedoch beigehalten, so dass Krümmungen und Ecken in Stäben getreu dargestellt werden.

In jedem Punkt  $x$  werden dann die sich für ihn ergebenden Schnittgrößen normal, gemäß ihrem Vorzeichen im lokalen Koordinatensystem und proportional zu ihrer Größe aufgetragen. Die dabei entstehende Kurve wird Schnittgrößenverlauf genannt.

Schnittgrößenverläufe sind deswegen von Bedeutung, da sie dem Sinn der Schnittgrößenbestimmung am weitesten gerecht werden. Wie schon kurz angedeutet, werden Schnittgrößen bestimmt, um Aussagen über die Beanspruchung eines Stabes (ob und wo er bricht, usw.) machen zu können. Um diese Aussagen jedoch formulieren zu können, braucht es möglichst detailliertes Wissen über den Schnittgrößenzustand<sup>14</sup>. Die oben angeführten Berechnungsmethoden liefern zwar solches Wissen, jedoch nur lokales und nicht das globale, das benötigt wird. Schnittgrößenverläufe dagegen liefern schnell und übersichtlich, viel globales Wissen über einen Schnittgrößenzustand, so dass man einfach daraus Schlussfolgerungen über Ort und Größe von maximalen Schnittkräften, un- oder unterbelastete Stabteile usw. ziehen kann.

Natürlich müssen Schnittgrößenverläufe erst einmal erstellt werden. Vor allem bei aufwendigen Trägern mit komplizierten Lastfällen kann dies nur durch Interpolation der oben angeführten Berechnungsmethoden erzielt werden. Für einfache Träger ist es jedoch oft produktiver alternative Wege zu suchen, um Schnittgrößenverläufe zu konstruieren. Einer dieser Wege ist die Anwendung von „Prinzipien“, welche wir zur Ehre unseres Statik Professors und Betreuer dieser Diplomarbeit nun „Palka'sche Korollare<sup>15</sup>“ taufen.

---

<sup>14</sup>Ein Schnittgrößenzustand beschreibt einen ganz spezifischen Verlauf von Schnittgrößen an einem ganz spezifischen Tragwerk.

<sup>15</sup>Korollare sind in der Mathematik Aussagen, welche so offensichtlich aus Definitionen oder Prämissen folgen, dass sie nicht Wert sind bewiesen zu werden.

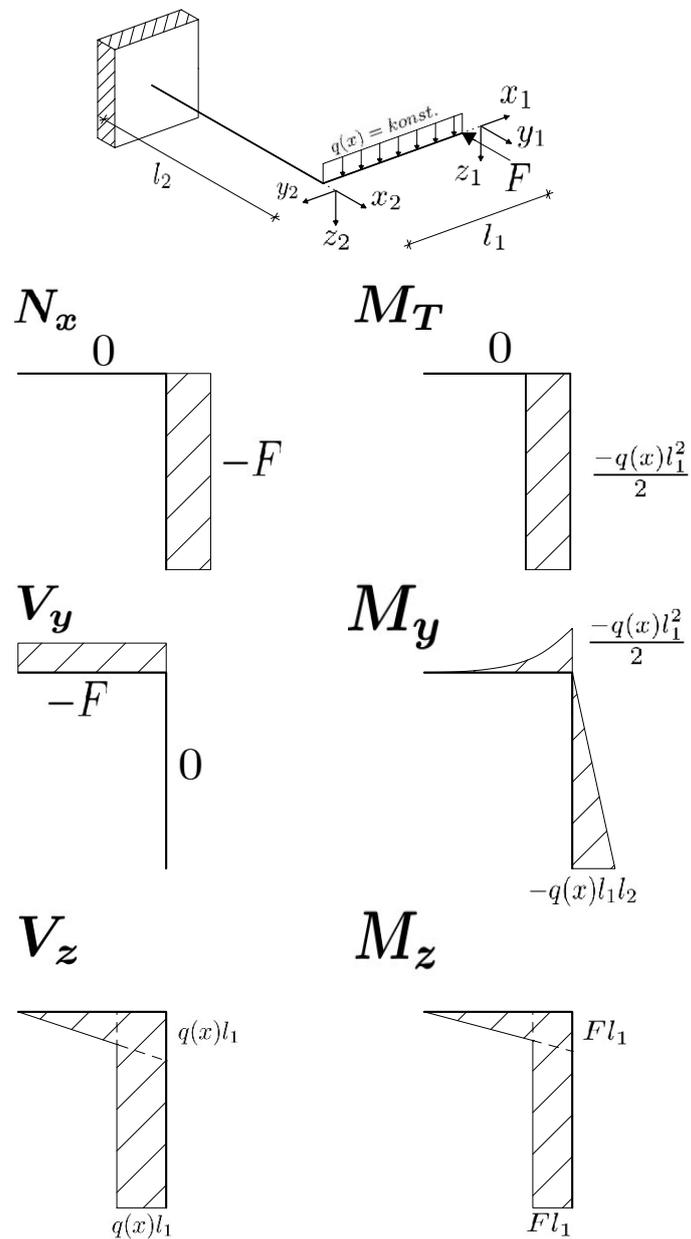


Abbildung 5.20: Beispiel für Schnittgrößenverläufe anhand einem Kragträger

### Palka'sche Korollare

Die Palka'schen Korollare sind eine Reihe von Regeln zur Konstruktion von Schnittgrößenverläufe, welche sich alle aus den vorhergehenden Überlegungen erschließen lassen. Obwohl die meisten von ihnen mehr als nur offensichtlich sind, werden wir uns der Vollständigkeit halber kurz die Zeit nehmen alle einmal zu diskutieren und gegebenenfalls zu beweisen<sup>16</sup>

#### 1. Palka'sches Korollar

„Querkraftlinien bleiben zwischen Einzellasten (unter Annahme, dass es keine Streckenlast gibt) unverändert.“

Wir betrachten einen unbelasteten Stabteil, welcher am linken Schnittufer die Querkraft  $V_{z,l}$  aufweist. Wir wollen nun die Querkraft  $V_{z,r}$  am rechten Schnittufer berechnen. Hierfür bilden wird das Gleichgewicht  $\sum_i V_z = 0$ , was

$$V_{z,l} = V_{z,r} \quad (5.83)$$

ergibt. Da der Punkt  $x_r$  zufällig gewählt wurde, können wir folgern, dass wir dasselbe Ergebnis an allen Punkten erzielen, welche dieselben Bedingungen haben, also unbelastet sind. Betrachten wir das als Zustandslinie dargestellt, so lässt sich leicht erkennen, dass die Querkraftkurve konstant ist, also auf einem unbelasteten Stabteil unverändert bleibt. Unter dem Stab in Abbild 5.21 ist der Querkraftverlauf  $V_z$  dargestellt.

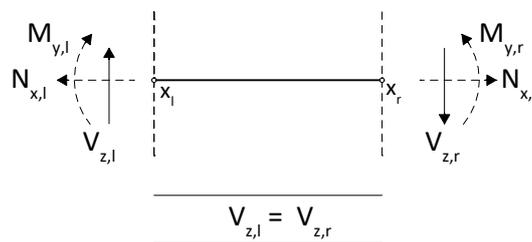


Abbildung 5.21: Unterstützende Skizze zum 1. Korollar

<sup>16</sup>Alle folgenden Beweise werden in zwei Dimensionen durchgeführt. Da es jedoch eine in der Statik eine fundamentale Symmetrie zwischen  $y$  und  $z$ -Achse gibt, sind natürlich alle Korollare auch für die dritte Dimension gültig.

### 2. Palka'sches Korollar

„Querkraftlinien springen unter Einzellasten um den Wert der Einzellast.“

Hierfür betrachten wir einen, wie in Abbildung 5.22 dargestellten, Stabteil, welcher mit einer Einzellast  $Q_z$  belastet ist. Der Punkt an dem diese Kraft einwirkt nennen wir  $x_Q$ . Am linken Stabteilende setzen wir eine Querkraft  $V_l$  voraus. Gesucht sind dann jeweils die Querkräfte infinitesimal bevor und nach dem Punkt  $x_Q$ .

Dafür schneiden wir zuerst kurz vor der Querkraft und bilden das Gleichgewicht  $\sum_i V_z = 0$ . Dies liefert uns, wie oben bereits gezeigt, das Ergebnis

$$V_{z,x_l} = V_{z,l}. \tag{5.84}$$

Nun führen wir einen Schnitt kurz nach der Querkraft durch und bilden wiederum das Gleichgewicht aller Kräfte in  $z$ -Richtung. Wir erhalten

$$V_{z,l} \pm Q_z - V_{z,r} = 0, \tag{5.85}$$

so dass

$$V_{z,r} = V_{z,l} \pm Q_z. \tag{5.86}$$

Tragen wir dieses Ergebnis auf einem Graph auf, so sehen wir einen Sprung an der Stelle  $x_G$  um den Wert  $Q_z$ .

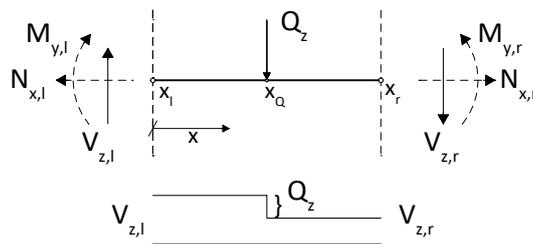


Abbildung 5.22: Unterstützende Skizze zum 2. Korollar

### 3. Palka'sches Korollar

„Querkräfte ändern sich unter Gleichlasten linear.“

Auch hier können wir wieder einen Stabteil betrachten, nun jedoch unter einer konstanten Gleichlast  $q(x)$ . Wir führen einen Schnitt am Punkt  $x_r$  durch, welcher  $x$  vom Punkt  $x_l$  entfernt ist. Durch bilden des Gleichgewichts aller Kräfte in  $z$ -Richtung am Punkt  $x$  erhalten wir den Zusammenhang

$$V_{(x)}^{(z,r)} = V_{z,l} \pm q_{(x)}^{(z)} \cdot x \quad (5.87)$$

Da wir gefordert haben, dass  $q_z(x)$  eine konstante Funktion ist, erhalten wir für  $V_{z,r}$  eine lineare Funktion nach  $x$ , welche sich in einem Schnittgrößenverlauf als eine lineare Veränderung darstellt.

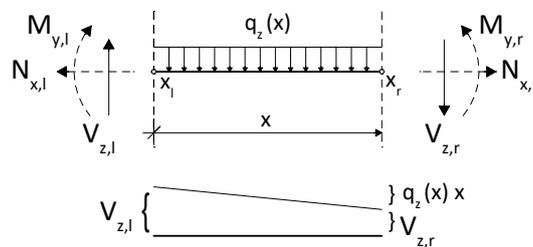


Abbildung 5.23: Unterstützende Skizze zum 3. Korollar

#### 4. Palka'sches Korollar

„Momentenlinien nehmen zwischen Einzellasten (unter der Annahme, dass es keine Streckenlast gibt) linear zu oder ab.“

Berücksichtigen wir den Zusammenhang  $M_i = F_j \cdot e_x$ , wenn wird das Gleichgewicht  $\sum_i M_{y,i}$  bilden, so erhalten wir

$$M_{(x)}^{(y,r)} = M_{y,l} \pm Q_z \cdot x \quad (5.88)$$

was uns eine lineare Gleichung für  $M_{y,r}$  ergibt. Wie schon beim 3. Palka'schen Korollar können wir das in einem Schnittgrößenverlauf darstellen, was uns einen linearen Verlauf ergibt.

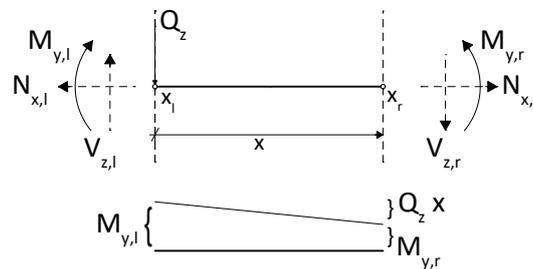


Abbildung 5.24: Unterstützende Skizze zum 4. Korollar

## 5. Palka'sches Korollar

„Momentenlinien knicken unter Einzellasten.“

Dieses Korollar ist sehr eng mit dem 4. Korollar verbunden, folgt jedoch nicht unmittelbar daraus, weshalb wir es hier extra behandeln wollen. Wie wir schon wissen, korrespondiert ein unbelasteter Stabteil zwischen zwei Einzellasten mit einem linearen Momentenverlauf. Dieses Korollar besagt nun, dass eine Einzellast immer zu einer Änderung der Steigung dieser linearen Funktion führen muss. Dazu betrachten wir einen Stabteil, welcher durch die Vertikalkraft  $V_{z,l}$  und die Einzellast  $Q_z$  belastet ist. Wie wir aus dem oberen Korollar folgern können ist die Momentenformel entlang  $x_1$

$$M_{y,x} = M_{y,l} \pm V_{z,l} \cdot x. \quad (5.89)$$

und entlang  $x_2$

$$\begin{aligned} M_{y,x} &= M_{y,l} \pm V_{z,l} \cdot x(x_1 + x) + Q_z \cdot x \\ &= M_{y,l} \pm \Delta_{x_l}^{x_m} M_y \pm (V_{z,l} + Q_z) \cdot x \end{aligned} \quad (5.90)$$

Solange also  $Q_z$  ungleich 0 ist, wird die Steigung der linearen Gleichung von  $M_{y,x_2}$  eine andere sein als für  $M_{y,x_1}$ , was sich in einer Zustandslinie als ein Knick unter einer Einzellast darstellt.

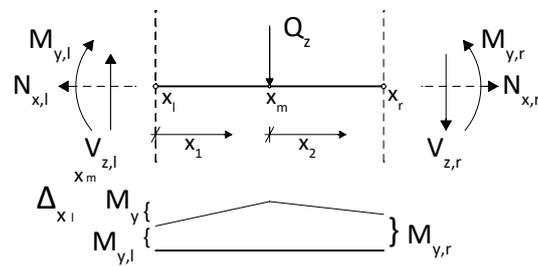


Abbildung 5.25: Unterstützende Skizze zum 5. Korollar

## 6. Palka'sches Korollar

„Momente ändern sich unter Gleichlasten nach einer quadratischen Parabel.“

Auch hier kann wieder mit der Gleichgewichtsbedingung  $\sum_i M_{y,i} = 0$  argumentiert werden. Wir betrachten diesmal ein Stabelement unter einer Gleichlast  $q_{(x)}^{(z)}$ . Diese Gleichlast erzeugt eine Querkraft gemäß

$$\Delta V_z = q_{(x)}^{(z)} \cdot x. \quad (5.91)$$

Da  $q_z(x)$  eine konstante Funktion ist, ist der Schwerpunkt (und damit der Lastangriffspunkt der Kraft) exakt in der Hälfte der Wirkstrecke, also  $\frac{x}{2}$ . Kombinieren wir das mit dem Wissen, welches wir schon in den vorhergehenden Korollaren hergeleitet haben, so ergibt sich für  $M_{y,r}$

$$M_{y,r} = M_{y,l} \pm V_{z,l} \cdot x \pm \frac{q_{(x)}^{(z)} x^2}{2} \quad (5.92)$$

was ein quadratischen Funktion entspricht, welche in einem Diagramm aufgetragen eine Parabel bildet.

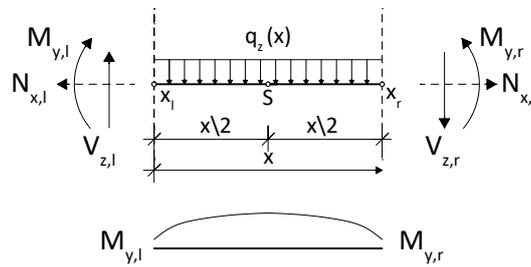


Abbildung 5.26: Unterstützende Skizze zum 6. Korollar

### 7. Palka'sches Korollar

„Momentenwerte am Punkt  $x$  entsprechen den Querkraftflächen bis zum Punkt  $x$ .“

Dies ist äquivalent zur Formulierung, dass die Momentenfunktion das Integral der Querkraftfunktion ist. Eine Argumentation, welche auch zum Beweis der vorhergehenden Korollare benutzt hätte werden können; allerdings wurde zwecks einer geordneten Anführung darauf verzichtet.

Man beginnt, indem man für ein infinitesimal kleines Stabelement die Summe aller  $M_y$  am Punkt  $x + dx$  bildet:

$$-M_{y,x} + M_{y,x+dx} + \frac{q_{(x)}^{(z)} dx^2}{2} - V_{z,x} \cdot dx = 0 \quad (5.93)$$

Da  $M_{y,x+dx}$  als  $M_{(x)}^{(y)} + dM_{(x)}^{(y)}$  geschrieben werden kann, wodurch sich beide  $M_{(x)}^{(y)} = M_{y,x}$  eliminieren und weiters  $\frac{q_{(x)}^{(z)}}{2} dx^2$  vernachlässigt werden kann, da es eine infinitesimal höhere Ordnung ist, ergibt sich

$$dM_{(x)}^{(y)} - V_{(x)}^{(z)} \cdot dx = 0, \quad (5.94)$$

was sich auf

$$V_{(x)}^{(z)} = \frac{dM_{(x)}^{(y)}}{dx} \quad (5.95)$$

umformen lässt.

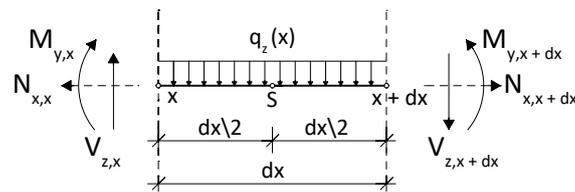


Abbildung 5.27: Unterstützende Skizze zum 7. Korollar

### 8. Palka'sches Korollar

„Momente sind maximal, wo Querkräfte 0 sind bzw. das Vorzeichen wechseln.“

Das 8. Korollar ist eine direkte Konsequenz aus dem 7., da dies für alle Integral-/Ableitungspaare wahr ist. Auf eine tiefergehende Diskussion wird daher verzichtet.

### 9. Palka'sches Korollar

„Schnittgrößen sind an Randauflagern und Kragarmenden 0.“

Damit Gleichgewicht herrschen kann, müssen alle Gleichgewichtsbedingungen erfüllt sein. Schneidet man durch die Mitte eines Stabes, so wurden Schnittgrößen genau deshalb eingeführt, um die Gleichgewichtsbedingungen, als Simulation für das weggeschnittene Tragwerksteil, zu erfüllen. Betrachtet man nun einen „Schnitt“ direkt am Stabende, so kann kein weiterer Einfluss simuliert werden. Das Tragwerk muss imstande sein sich selbst im Gleichgewicht zu halten. Dies ist auch in die Definition von Stabenden eingeflossen, welche definiert sind, als Punkte, wo keine Kraftgrößen übertragen werden können und daher alle Kraftgrößen verschwinden müssen.

Betrachtet man Randauflager, so müssen auch dort die Schnittgrößen, gerade wegen den Auflagerreaktionen, verschwinden.

### 10. Palka'sches Korollar

„Querkraftflächen gleichen sich über dem gesamten Träger (unter Annahme, dass es keine Momentenlast gibt) aus.“

Wenn es keine Momentenlast gibt, können Momente nur durch Querkräfte entstehen. Aus dem 9. Palka'schen Korollar wissen wir nun aber, dass das Moment

$M_y$  am Rand immer 0 ist. Weiters muss dann natürlich auch gelten, dass  $M_y$  wieder zu 0 wird, wenn es sich einem anderen Rand nähert.

Wir nehmen nun an, die Momentenfunktion hat nur ein Extremum  $M_{y,\max}$ , welches am Punkt  $x_{\max}$  angreift. Dann muss gelten:

$$\Delta_0^{x_{\max}} M_y = \Delta_{x_{\max}}^l M_y \quad (5.96)$$

Da nun aber

$$\Delta M_y = \int V_{(x)}^{(z)} dx, \quad (5.97)$$

so folgt

$$\int_0^{x_{\max}} V_{(x)}^{(z)} dx = - \int_{x_{\max}}^l V_{(x)}^{(z)} dx \quad (5.98)$$

was äquivalent ist zu sagen, dass sich die Querkraftflächen ausgleichen müssen, also gleich groß sind.

Es ist auch leicht erkennbar, dass Zusammenhang 5.98 für jeden beliebigen Punkt  $x$  zwischen 0 und  $l$  gelten muss. Dies folgt aus dem allgemeinen mathematischen Zusammenhang

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx. \quad (5.99)$$

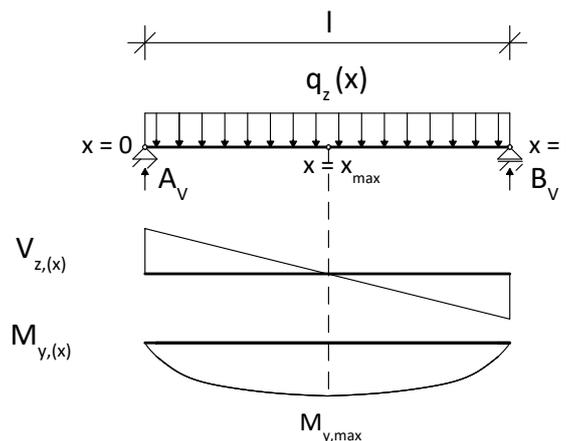


Abbildung 5.28: Unterstützende Skizze zum 10. Korollar

### 11. Palka'sches Korollar

„Momente haben an eingespannten Auflagern den Wert des Einspannmomentes (Auflagermomentes).“

Dies ist eine Spezifizierung der Aussage

„Schnittgrößenlinien springen an Auflagern gemäß der Auflagerkraftgröße.“

auf Momente bezogen. Sie wird schnell nachvollziehbar, wenn man Auflagerreaktion als einfache Lasten ansieht. Dann ist das 11. Palka'sche Korollar nichts weiter als eine Fassung des 2. Palka'schen Korollars.

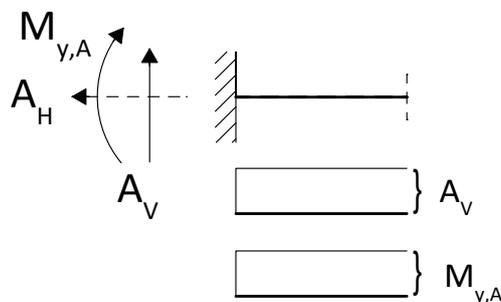


Abbildung 5.29: Unterstützende Skizze zum 11. Korollar

### 12. Palka'sches Korollar

„Momente an beiden Seiten von Stabecken haben dasselbe Vorzeichen und sind gleich groß.“

Dies entspricht der Argumentation, dass Schnittgrößen ihre Orientierung im Raum immer beibehalten, was in einer 2-dimensionalen Ebene dazu führt, dass das aus der Ebene herausstehende Moment  $M_y$  über Ecken immer konstant bleibt.

### 13. Palka'sches Korollar

„Momentenlinien springen um die Beträge der eingepprägten Momente von angeschlossnen Stäben.“

In diesem Korollar ist ein durchlaufender Stab gemeint, an welchem ein Nebenstab angeschossen ist. Es besagt nun, dass das Moment an der einen Seite des Hauptstabes addiert mit dem Moment des Nebenstabes, das Moment an der anderen Seite des Hauptstabes bildet. Das ist, wie in Abschnitt 5.3.4 gezeigt, eine Forderung, welche sich aus der Gleichgewichtsbedingung für Momente herleitet. Um noch einmal kurz zu revidieren:

Aus

$$\sum_i M_{y,i} = M_{y,H,l} + M_{y,N} - M_{y,H,r} = 0 \quad (5.100)$$

folgt

$$M_{y,H,r} = M_{y,H,l} + M_{y,N} \quad (5.101)$$

was zu zeigen war.

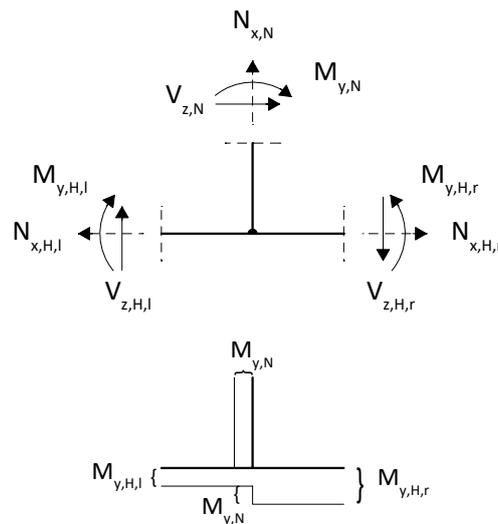


Abbildung 5.30: Unterstützende Skizze zum 13. Korollar

### 14. Palka'sches Korollar

„An rechtwinkligen Ecken werden Querkräfte zu Normalkräfte und umgekehrt.“

Auch dieses Korollar folgt aus dem Erhaltungssatz der Orientierung für Kraftgrößen. Betrachten wir eine Ecke mit dem lokalen Koordinatensystem  $x_E$  und  $z_E$  und bilden ein Gleichgewicht für jede Achse, so folgt aus

$$\sum_i F_{x,i} = 0 \qquad V_{z,1} = N_{x,2}$$

und aus

$$\sum_i F_{z,i} = 0 \qquad N_{x,1} = V_{z,2}$$

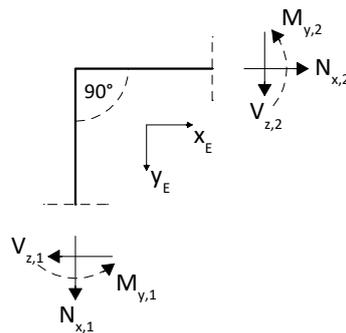


Abbildung 5.31: Unterstützende Skizze zum 14. Korollar

Mit diesen 14 Korollaren können die Schnittgrößenverläufe von ausreichen vielen Systemen auf einfachem Wege bestimmt werden. Für aufwendigere Tragwerke mit komplizierteren Lastfällen, vor allem aber für nicht geradlinige Stäbe, müssen andere Bestimmungsmethoden, wie jene Formalismen aus Abschnitt 5.3.2, verwendet werden.

## 5.4 Verformungen

Unter Verformungen versteht man die Summe aller Lage- bzw. Orientierungsänderung<sup>17</sup> von Punkten eines Tragwerks. Wie schon aus Abschnitt 5.1.2 bekannt, unterscheidet man wie bei Schnittgrößen zwei große Kategorien an Verformungen: Verschiebungen und Verdrehung. Diese wiederum haben jeweils drei Repräsentanten für die drei Dimensionen des Raumes. Sie werden folgendermaßen bezeichnet:

<sup>17</sup>Mit Orientierungsänderungen sind Verdrehungen gemeint.

- $u_{(x)}$ <sup>18</sup> die Verschiebung in  $x$ -Richtung
- $v_{(y)}$  die Verschiebung in  $y$ -Richtung
- $w_{(z)}$  die Verschiebung in  $z$ -Richtung
- $\varphi_x$  die Verdrehung um die  $x$ -Achse, oft auch als Verdrillung bezeichnet
- $\varphi_y$  die Verdrehung um die  $y$ -Achse
- $\varphi_z$  die Verdrehung um die  $z$ -Achse

Abbildung 5.32 zeigt die unterschiedlichen Verformungsgrößen an einem Stabteil. Die strichlierten Stäbe stellen den unverformten Zustand und die festen Stäbe den verformten da. Die Darstellung am Stabelement wurde nur der Übersichtlichkeit gewählt. In der Regel beziehen sich Verformungsgrößen auf einzelne Punkte oder Querschnitt. Auch sei herausgestellt, dass die verschiedenen Querschnitte eines Stabes nicht die selbe Verformung haben müssen. Im Regelfall ist es sogar das Gegenteil der Fall.

### Zusammenhang zwischen Spannungen, Verzerrungen und Verformungen

Zuerst wollen wir die in Abschnitt 5.1.2 angerissenen Begriffe Längsdehnung und Schubverzerrung genau definieren.

Betrachten wir einen infinitesimal kleinen Stabteil der Länge  $dx$ , welches sich um die Länge  $du$  dehnt, so nennen wir

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} \quad (5.102)$$

die Längsdehnung.

---

<sup>18</sup>Bei den Verschiebungen wurden die Indizes in Klammer gesetzt, da auf sie oft verzichtet wird. Sie sind jedoch auf keinen Fall als funktionale Abhängigkeit zu interpretieren.

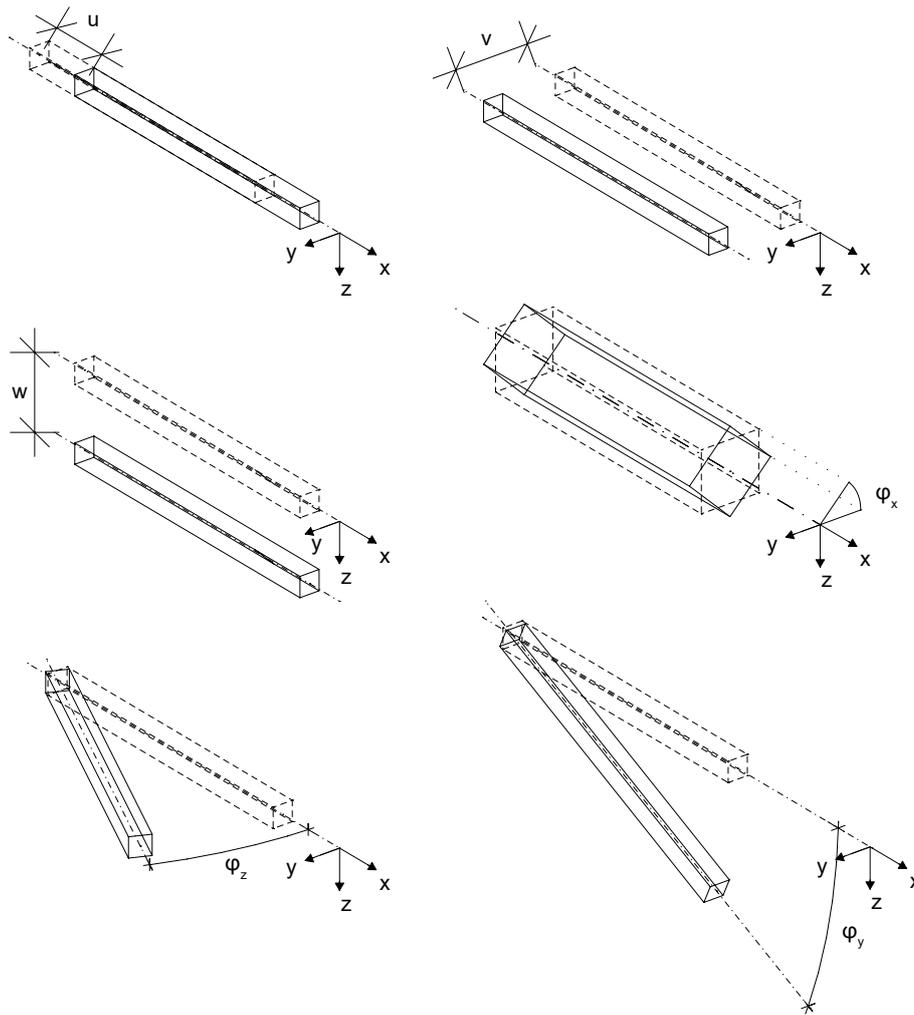


Abbildung 5.32: Erklärung der Verformungen am Stabteil

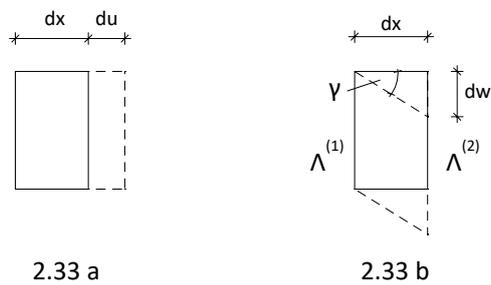


Abbildung 5.33: Längsdehnung und Schubverzerrung

Wird der am selben Stabteil die Querschnitte  $\Lambda^{(1)}$  und  $\Lambda^{(2)}$  um die Länge  $dw$  gegeneinander verschoben und gilt wegen der ausreichenden Kleinheit  $\tan(\gamma) = \gamma$ , so definieren wir

$$\gamma = \frac{dx}{dw} \quad (5.103)$$

als Schubverzerrung.

Der fundamentale Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen lautet nun:

„Jede Spannung führt zu einer Verzerrung.“

Aus Beobachtung wird jeder Spannung eine charakteristische Verzerrung zugewiesen:

- der Normalspannung  $\sigma$  die Längsdehnung  $\varepsilon$
- der Schubspannung  $\tau$  die Schubverzerrung  $\gamma$

Die Proportionalitätskonstanten werden Elastizitätsmodul  $E$  und Schubmodul  $G$  bezeichnet. Sie ergeben sich aus ihren eigenen Definitionen:

$$d\sigma = E \cdot d\varepsilon \quad (5.104)$$

$$d\tau = G \cdot d\gamma \quad (5.105)$$

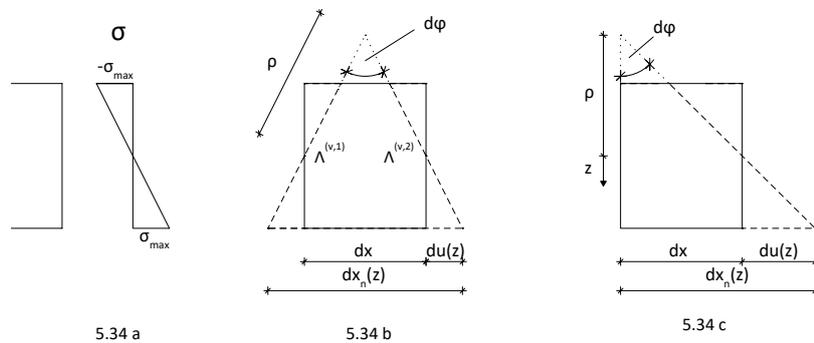


Abbildung 5.34: Biegeverzerrung

Es sei angenommen, dass  $E$  und  $G$  über einem jeden Querschnitt konstant sind. So folgt aus dem linearen Verlauf von Schubspannungen unter Biegung ein linearer Verlauf der Längsdehnungen  $\varepsilon$ , wie dargestellt in Abbildung 5.34. Verlängern wir die beiden so entstandenen Schnittufer  $\Lambda^{(v,1)}$  und  $\Lambda^{(v,2)}$  so schneiden sie sich, da sie nicht parallel sind, in einem Punkt. Der Winkel, der von diesen beiden Linien an diesem Punkt eingeschlossen wird, wird  $d\varphi$  genannt. Die Länge von einem beliebigen der beiden oberen Punkte der Querschnitte bis zum Schnittpunkt derer beiden wird Krümmungsradius  $\rho$  genannt. Wir definieren nun die Krümmung  $\kappa$  als

$$\kappa = \frac{1}{\rho}. \quad (5.106)$$

Somit ergibt sich bei ausreichender Kleinheit von  $d\varphi$

$$\kappa = \frac{d\varphi}{dx}. \quad (5.107)$$

Wir können noch die neue Länge  $dx_n(z)$  berechnen, mit

$$dx_n(z) = dx + du(z). \quad (5.108)$$

Da der Winkel  $d\varphi$  sich nicht ändert, wenn wir  $du(z)$  auf eine Seite bringen (wie in Abb. 5.34c), können wir leicht ablesen:

$$dx_n(z) = (\rho + z) \cdot \tan(d\varphi), \quad (5.109)$$

was wir vereinfachen können, als

$$dx_n(z) = (\rho + z) \cdot d\varphi. \quad (5.110)$$

Durch Gleichsetzen von (5.108 und 5.110) und Umformen erhält man schließlich

$$du(z) = z \cdot d\varphi = z \cdot \kappa \cdot dx^{19}. \quad (5.111)$$

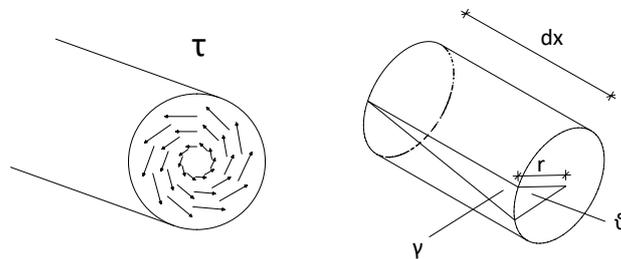


Abbildung 5.35: Torsionsverzerrung

Äquivalent kann bei Schubspannung aus Torsionsbeanspruchung argumentiert werden. Wie bekannt nehmen bei einer Torsionsbeanspruchung die Schubspannungen vom Zentrum gemessen nach außen hin linear zu. Weiters sind alle  $\tau$ -Spannungen tangential zum Radius gerichtet. Aus diesem Spannungsverlauf folgt ein gleichermaßen gerichteter Schubverzerrungsverlauf, so dass sich ein Winkel  $\gamma$  und ein Winkel  $\vartheta$  ausbilden. Per Definition setzen wir dann die Verdrillung  $\vartheta'$ <sup>20</sup> gleich

$$\vartheta' = \frac{\vartheta}{dx} \quad (5.112)$$

wenn wir  $\vartheta$  als klein genug annehmen, so dass  $\tan(\vartheta) = \vartheta$ . Aus Abb. 5.35 kann der Zusammenhang

$$\gamma dx = r d\vartheta \quad (5.113)$$

abgelesen werden.

<sup>19</sup>Wobei  $z$  so definiert ist, dass sein 0-Punkt in der Stabachse, also im Punkt ohne Längsdehnung, liegt.

<sup>20</sup>Krümmung kann als Winkel pro Längeneinheit gesehen werden. Dementsprechend kann man  $\vartheta'$  als Krümmung um die  $x$ -Achse interpretieren.

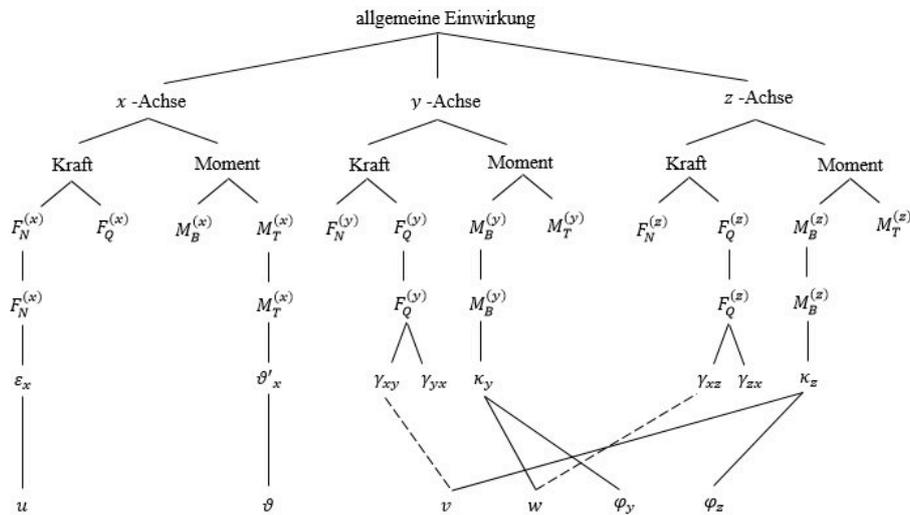


Abbildung 5.36: Abbildung zur Veranschaulichung der wesentlichen Verzerrungen

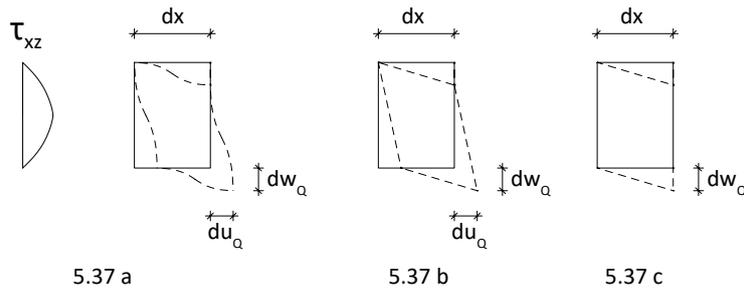


Abbildung 5.37: Schubverzerrung ohne und mit Hypothese von Bernoulli

Um zu erkennen, welche Verzerrungen in realen Betrachtung zu beachten sind, betrachten wir Abbildung 5.36. Da viele Einwirkungen der Kleinheit halber vernachlässigt werden können, können auch die durch sie verursachten Verzerrungen vernachlässigt werden. Übrig bleiben die sechs schon bekannten Schnittgrößen mit ihren jeweiligen charakteristischen Verzerrungen. Die Querkräfte  $V_y$  und  $V_z$  gehen mit zwei Schubverzerrungen einher, da jede Querkraft nach dem Satz der zugeordneten Schubspannungen zwei Schubspannungen  $\tau_{ij}$  und  $\tau_{ji}$  hervorruft. Schubverzerrungen treten also immer in Paaren auf und führen so zu Verzerrungen wie in Abb. 5.37 dargestellt.

Da die  $\tau$ -Spannungen sich über den Querschnitt wie quadratische Parabeln verhalten, entstehen auch ungleichförmige Verformungen, welche dazu führen, dass

sich die Querschnitte, wie in Abb. 5.37 a dargestellt, verbiegen. Dies verkompliziert die Berechnung von Spannungen (und von Verformungen) um einiges, ohne jedoch signifikant das Ergebnis zu verändern. Der Kleinheit, vor allem aber der Einfachheit halber wird deswegen die Schubverzerrung vernachlässigt. Man bezeichnet dies als Hypothese von Bernoulli.

Die Hypothese von Bernoulli nimmt an, dass Querschnitte welche im unverformten Zustand normal auf die Stabachse stehen und in sich eben sind auch im unverformten Zustand normal auf die Stabachse und eben sind. Dies entspricht einer Vernachlässigung des quadratischen Charakters der Gleitung. So wird aus Abb. 5.37 a Abb. 5.37 b.

Zusätzlich dazu wird auch oft angenommen, dass  $G \cdot A = \infty$  ist, wodurch die Schubverzerrungen komplett vernachlässigt werden. Dies ist dadurch möglich, dass die Gleitungen  $w_Q$  und  $u_Q$  meist um den Faktor 100 kleiner sind als die Durchbiegung  $w$  aufgrund des Momentes  $M_y$  und die Längsdehnung  $u$  aufgrund der Normalkraftbeanspruchung. In Ausnahmefällen wird jedoch die Quergleitung  $w_Q$  berücksichtigt, womit Abb. 5.37 c entsteht, welche wir schon früher skizziert wurde. Die Längsgleitung  $u_Q$  wird (de facto) nie berücksichtigt, da sie im Vergleich zur langen Stablänge unwesentlich ist<sup>21</sup>.

Es ergeben sich nun folgende relevante Verzerrungen:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} \quad (5.114)$$

$$\gamma_y = \frac{dw}{dx} \quad (5.115)$$

$$\gamma_z = \frac{dv}{dx} \quad (5.116)$$

$$\kappa_y = \frac{d\varphi_y}{dx} \quad (5.117)$$

$$\kappa_z = \frac{d\varphi_z}{dx} \quad (5.118)$$

---

<sup>21</sup>Um herauszustreichen wie unwesentlich die Längsgleitung  $u_Q$  ist, sei gesagt, dass im Standardfall sich  $\frac{u_Q}{l}$  auf rund  $5 \cdot 10^{-6}$  ergibt, wobei  $l$  die Stablänge ist. Bei einer Stablänge von 10m entspricht dies  $50\mu\text{m}$ . Selbstverständlich hängt der Wert  $u_Q$  stark von der Tragwerksform, der Steifigkeit und der Belastung ab. Der genannte Wert soll bloß ein Richtwert sein, um die Größenordnung der Längsschubverzerrung einschätzen zu können.

$$\vartheta_{x'} = \frac{d\vartheta}{dx} \quad (5.119)$$

Es ist nun leicht ersichtlich, wie sich daraus die Verformungen ergeben:

$$du = \varepsilon_x \cdot dx \quad u = \int \varepsilon_x dx \quad (5.120)$$

$$dw = \gamma_y \cdot dx \quad w = \int \gamma_y dx \quad (5.121)$$

$$dv = \gamma_z \cdot dx \quad v = \int \gamma_z dx \quad (5.122)$$

$$d\varphi_y = \kappa_y \cdot dx \quad \varphi_y = \int \kappa_y dx \quad (5.123)$$

$$d\varphi_z = \kappa_z \cdot dx \quad \varphi_z = \int \kappa_z dx \quad (5.124)$$

$$d\vartheta_x = \vartheta'_x \cdot dx \quad \vartheta_x = \int \vartheta'_x dx \quad (5.125)$$

Nun wollen wir uns dem Zusammenhang zwischen Schnittgrößen und Verformungen widmen:

Zuerst betrachten wir den Fall reiner Dehnung. Aus

$$\sigma = E\varepsilon \quad (5.126)$$

und

$$N = \int_A \sigma dA \quad (5.127)$$

folgt durch Einsetzen

$$N = \int_A E\varepsilon dA = E\varepsilon \int_A dA = EA\varepsilon, \quad (5.128)$$

also

$$\varepsilon = \frac{N}{EA}. \quad (5.129)$$

Im Weiteren soll  $D$  als die Dehnsteifigkeit

$$D = EA \quad (5.130)$$

definiert sein.

Nun wollen wir den Fall der reinen Querkraft behandeln. Dafür gilt der Zusammenhang

$$V = \int_A \tau(z) dA. \quad (5.131)$$

Wir setzen

$$\tau(z) = \gamma'(z)G^{22} \quad (5.132)$$

ein und erhalten

$$V = \int_A \gamma'(z)G dA. \quad (5.133)$$

$\gamma'(z)$  ist die erste Ableitung des Schubwinkels  $\gamma$ .  $\gamma'(z)$  gibt also an, wie sehr sich der Schubwinkel am Punkt  $z$  des Querschnittes aufgrund der Schubspannung  $\tau(z)$  am Punkt  $z$  ändert. Das gesagt, können wir  $G$  vor das Integral ziehen:

$$V = G \int_A \gamma'(z) dA \quad (5.134)$$

Da wir nun jedoch  $\gamma'(z)$  nicht vor das Integral ziehen können, führen wir den Wert  $\gamma$  ein, welcher quasi einen Durchschnittswert von  $\gamma'(z)$  darstellt. Um die Abweichung dieses Durchschnittswertes von der integrierten Schubverzerrung  $\gamma'(z)$  zu berücksichtigen, wird außerdem noch ein Korrekturfaktor  $\kappa_Q$  eingezogen. Der genaue Ursprung von  $\gamma$  und  $\kappa_Q$  wird gleich noch genau erläutert, zuerst soll jedoch die Herleitung abgeschlossen werden.

$$V = G \int_A \gamma \kappa_Q dA \quad (5.135)$$

Da nun weder  $\gamma$  noch  $\kappa_Q$  Funktionen nach  $A$  sind, können sie vor das Integral gezogen werden und man erhält

$$V = G\gamma\kappa_Q \int_A dA = G\gamma\kappa_Q A = GA_Q\gamma \quad (5.136)$$

---

<sup>22</sup>Wir vernachlässigen hier bewusst den Satz der zugehörigen Schubspannungen und nehmen die Schubverzerrung nach vorhergehender Erläuterung als eindimensional an; vernachlässigen also den Anteil in Stabachsenrichtung.

und somit

$$\gamma = \frac{V}{GA_Q}. \quad (5.137)$$

Wir wollen nun die Herkunft von  $\gamma$  und  $\kappa_Q$  untersuchen.

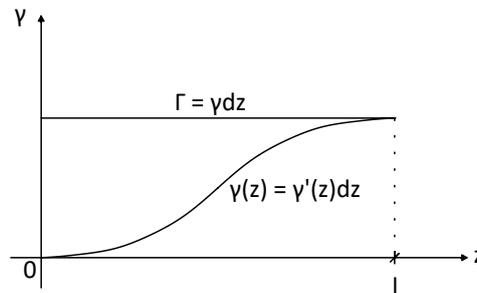


Abbildung 5.38: Erklärende Abbildung zu den Größen  $\gamma$  und  $\kappa_Q$

Dazu betrachten wir die Funktionen  $\gamma(z) = \gamma'(z)dz$  und  $\Gamma = \gamma dz$  in der Abbildung 5.38. Das Verhältnis der beiden ergibt sich zu

$$\frac{\gamma'(z)dz}{\gamma dz} = \frac{\gamma'(z)}{\gamma} = \kappa_Q \quad (5.138)$$

was der Definition von  $\kappa_Q$  entspricht. Wir können Formel 5.138 umformen und erhalten so

$$\gamma'(z) = \gamma \kappa_Q, \quad (5.139)$$

was wir in die obige Formel 5.134 eingesetzt haben. Nun sind jedoch sowohl  $\gamma$  als  $\kappa_Q$  Konstanten und können so vor das Integral gezogen werden. Da der Wert  $\kappa_Q$  nur von der Querschnittsform abhängt, wird er mit der Fläche  $A$  fusioniert und man erhält die Schubfläche  $A_Q$ , welche für jede Querschnittsform extra bestimmt werden muss. Weiters sei das Produkt  $GA_Q$  als die Schubsteifigkeit  $S$  definiert. Nun zur Biegeverformung: Da die Biegeverformung durch ungleichmäßige Längsdehnung definiert ist, kann man eine Funktion  $du(z)$  definieren, welche, nach Formel 5.111, folgende Gleichung erfüllt:

$$du(z) = d\varphi \cdot z \quad (5.140)$$

Da  $du(z) = \varepsilon(z) \cdot dx$  kann man Gleichsetzen und Umformen zu:

$$\varepsilon(z) = \frac{d\varphi}{dx} \cdot z = \kappa \cdot z \quad (5.141)$$

Nun können wir dies in die Formel

$$M = \int_A \sigma(z)z da \quad (5.142)$$

einsetzen und erhalten

$$M = \int_A E\varepsilon(z)z dA = \int_A E\kappa z^2 dA = E\kappa \int_A z^2 dA = EI\kappa \quad (5.143)$$

was uns die Formel

$$\kappa = \frac{M}{EI} \quad (5.144)$$

bringt. Hier sei

$$EI = B \quad (5.145)$$

die Biegesteifigkeit genannt.

Nun sei ein Stabelement der Länge  $dx$  durch ein Torsionsmoment  $M_T$  belastet.

Die Gleichgewichtsbedingung am Querschnitt ergibt sich dann als

$$M_T = \int_A \tau_T(r)r dA, \quad (5.146)$$

wobei  $r$  der Abstand des betrachteten Punktes von der Schwerachse ist. Wir substituieren nun  $\tau_T(r)$

$$M_T = \int_A \gamma_T(r)Gr dA \quad (5.147)$$

und bedienen uns dem Zusammenhang  $\gamma dx = r d\vartheta$ . Es ergibt sich

$$M_T = \int_A r \frac{d\vartheta}{dx} Gr dA = G\vartheta' \int_A r^2 dA = GI_T\vartheta' \quad (5.148)$$

was umgeformt

$$\vartheta' = \frac{M_T}{GI_T} \quad (5.149)$$

ergibt. Das Produkt  $GI_T$  wird als Torsionssteifigkeit  $T$  bezeichnet.

Nun haben wir eine Reihe von Funktionen der Verzerrungen nach den Schnittkräften. Berücksichtigt man noch, dass Verformungen das Integral der Verzerrungen sind, so lassen sich durch eine einfache Aufintegration der Verzerrungen über die Länge Funktionen der Verformungen nach den Schnittkräften bilden. Im Folgenden wird der Index (welcher die Orientierung angibt) wieder wie bekannt in den Superscript geschrieben, um im Subscript Platz für die Abhängigkeit zu machen. Größen, welche nicht orientierungsbezogen sind, haben natürlich keinen Index. Demnach folgt aus 5.120 und 5.129

$$u_{(x)}^{(x)} = \int_x \frac{N_{(x)}^{(x)}}{E(x)A(x)} dx, \quad (5.150)$$

aus 5.122 und 5.137

$$v_{(x)}^{(y)} = \int_x \frac{V_{(x)}^{(y)}}{G(x)A_Q(x)} dx, \quad (5.151)$$

aus 5.121 und 5.137

$$w_{(x)}^{(z)} = \int_x \frac{V_{(x)}^{(z)}}{G(x)A_Q(x)} dx, \quad (5.152)$$

aus 5.124 und 5.144

$$\varphi_{(x)}^{(y)} = \int_x \frac{M_{(x)}^{(y)}}{E(x)I(x)} dx, \quad (5.153)$$

aus 5.125 und 5.144

$$\varphi_{(x)}^{(z)} = \int_x \frac{M_{(x)}^{(z)}}{E(x)I(x)} dx \quad (5.154)$$

und aus 5.123 und 5.149

$$\vartheta_{(x)}^{(x)} = \int_x \frac{M_{(x)}^{(T)}}{G(x)I_{(x)}^{(T)}} dx. \quad (5.155)$$

### 5.4.1 Berechnung von Verformungen

Zur Berechnung von Verformungen gibt es zwei wesentliche Vorgangsweisen. Die eine wäre die Berechnung durch das Prinzip der virtuellen Kräfte. Das zweite, jenes das wir hier nun behandeln wollen, ist die Berechnung durch Anwendung

der Verformungsfunktionen 5.150 bis 5.155.

Diese Berechnung ist sehr nahe dem Berechnungsverfahren der Schnittgrößen, welches in Abschnitt 5.3.2 behandelt wurde. Zuerst sei hierzu folgende fundamentale Ausgangshypothese dargelegt:

„Alle für die Verformung wesentlichen Informationen sind im Schnittgrößenverlauf enthalten.“

Dies inkludiert auch jegliche Vorspannungen, Federn und Zwangsverformungen. Diese zuerst werkwürdig anmutende Behauptung wird dann in Kapitel 6 ersichtlich, wo dargelegt wird, wie sich oben genannte Einflüsse auf Schnittgrößen auswirken. Tatsächlich sind Schnittgrößen nämlich von Faktoren wie Zwangsverformungen abhängig und so werden solche Faktoren gleich in den einzelnen Verläufen integriert. Einzig und allein Kriechen, Schwinden und Temperaturverformungen schlagen sich nicht auf Schnittgrößen wieder<sup>23</sup>, zumindest nicht in dem Sinne der hier von Bedeutung ist.

Zur mathematischen Beschreibung seien die folgenden Objekte definiert:

- Der Verformungsvektor  $V$

$$V(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \\ w(x) \\ \varphi_{(x)}^{(y)} \\ \varphi_{(x)}^{(z)} \\ \vartheta(x) \end{pmatrix}$$

- Der Verzerrungsvektor  $Z$

---

<sup>23</sup>Zwangsverformungen, sowie Temperaturendehnungen können sehr wohl auf Schnittgrößen wirken, nämlich dann wenn die geforderte Verformung durch Auflager unterbunden wird. Da dann jedoch auch die Verformung an sich unterbunden wird, ist dieser Fall hier nicht von Bedeutung, und wird erst später in Kapitel 6 behandelt.

$$Z(x) = \begin{pmatrix} \varepsilon(x) \\ \gamma_{(x)}^{(y)} \\ \gamma_{(x)}^{(z)} \\ \kappa_{(x)}^{(y)} \\ \kappa_{(x)}^{(z)} \\ \vartheta'(x) \end{pmatrix}$$

- Die Steifigkeitsmatrix  $\underline{M}$

$$\underline{M}(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{E(x)A(x)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{G(x)A_{(x)}^{(Q)}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G(x)A_{(x)}^{(Q)}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{E(x)I(x)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{E(x)I(x)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G(x)I_{(x)}^{(T)}} \end{pmatrix}$$

Mit diesen Objekten lassen sich nun die Formeln 5.129 bis 5.149 als

$$Z(x) = \underline{M}(x)S(x) \quad (5.156)$$

zusammenfassen, wenn  $S(x)$  der Schnittgrößenvektor

$$S(x) = \begin{pmatrix} N_{(x)}^{(x)} \\ V_{(x)}^{(y)} \\ V_{(x)}^{(z)} \\ M_{(x)}^{(y)} \\ M_{(x)}^{(z)} \\ M_{(x)}^{(T)} \end{pmatrix}$$

ist. Dieser Vektor ergibt sich aus den vorhergehenden Berechnungsmethoden des Abschnittes 5.3.2 und wird hier nun nicht weiter diskutiert. Er ist als bekannt angenommen.

Nun ergibt sich der Verformungsvektor  $V$  aus alleiniger Integration des Verformungsvektors  $Z$ . Jedoch muss auch hier zwischen gebundenen und ungebundenen Verformungen unterschieden werden.

Als ungebundene Verformungen  $V^{(u)}$  gelten

$$V_{(x)}^{(u)} = \begin{pmatrix} u(x) \\ \varphi_{(x)}^{(y)} \\ \varphi_{(x)}^{(z)} \\ \vartheta(x) \end{pmatrix}.$$

Sie sind nur von ihren korrespondierenden Verzerrungen

$$Z_{(x)}^{(u)} = \begin{pmatrix} \varepsilon(x) \\ \kappa_{(x)}^{(y)} \\ \kappa_{(x)}^{(z)} \\ \vartheta'(x) \end{pmatrix}$$

abhängig.

Demnach ergeben sich die ungebundenen Verformungen einfach als

$$V_{(x)}^{(u)} = \int Z_{(x)}^{(u)} dx. \quad (5.157)$$

Ihnen gegenüber stehen folgende gebundenen Verformungen

$$V_{(x)}^{(g)} = \begin{pmatrix} v(x) \\ w(x) \end{pmatrix}$$

gegenüber. Sie sind sowohl von ihren korrespondierenden Verzerrungen

$$Z_{(x)}^{(g)} = \begin{pmatrix} \gamma_{(x)}^{(y)} \\ \gamma_{(x)}^{(z)} \end{pmatrix}$$

als auch von den ungebundenen Verzerrungen

$$Z_{(x)}^{(\ddot{u})} = \begin{pmatrix} \kappa_{(x)}^{(y)} \\ \kappa_{(x)}^{(z)} \end{pmatrix}$$

abhängig. Dies sei nun gezeigt:

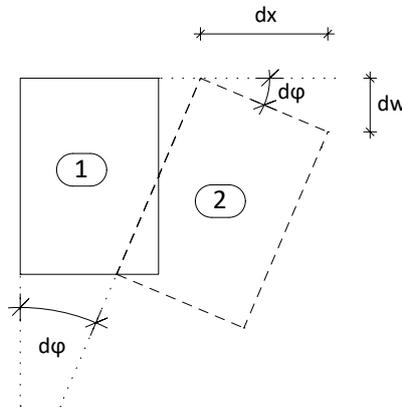


Abbildung 5.39: Auswirkung der Krümmung auf die Durchbiegung

Wir betrachten ein infinitesimales Stabelement an dem ein weiteres Stabelement angeschlossen ist. Der Zweckmäßigkeit wird die gesamte durch  $d\varphi$  verursachte Längsverformung auf einer Seite dargestellt.

Wegen der Längsverformung von Teilstück 1 wird Teilstück 2 um den Winkel  $d\varphi$  verdreht. Aus der Skizze folgt dann (dank der Kleinheit von  $d\varphi$ ):

$$d\varphi = \frac{dw}{dx} \quad \text{bzw.} \quad dw = d\varphi \cdot dx \quad (5.158)$$

Und da sich  $d\varphi$  als  $\kappa dx$  ergibt:

$$dw = \kappa \cdot dx^2 \quad (5.159)$$

Aus Symmetrieüberlegungen gilt dies natürlich auch für die Verformung  $v$ .

Gebundene Verformungen setzen sich jetzt jeweils aus einem Anteil an Schubverzerrung und einem Anteil an Verkrümmung zusammen:

$$V_{(x)}^{(g)} = \int Z_{(x)}^{(g)} + \int \int Z_{(x)}^{(\ddot{u})} dx^2 \quad (5.160)$$

Wir können nun den Verformungsvektor mithilfe einer Differentialmatrix  $\underline{dx}$  ge-

samt beschreiben:

$$\begin{pmatrix} du(x) \\ dv(x) \\ dw(x) \\ d\varphi_{(x)}^{(y)} \\ d\varphi_{(x)}^{(z)} \\ d\vartheta(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & dx & 0 & 0 & dx^2 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dx^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & dx & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & dx & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon(x) \\ \gamma_{(x)}^{(y)} \\ \gamma_{(x)}^{(z)} \\ \kappa_{(x)}^{(y)} \\ \kappa_{(x)}^{(z)} \\ \vartheta'(x) \end{pmatrix} \quad (5.161)$$

Was sich vereinfacht geschrieben als

$$dV(x) = \underline{dx}Z(x) \quad \text{bzw.} \quad V(x) = \int \underline{dx}Z(x) \quad (5.162)$$

ergibt.

Nun ergibt sich jedoch äquivalent zu den Schnittgrößen auch bei den Verformungen das Problem der Anfangsbedingungen. Bekanntlicherweise entstehen durch Integration Integrationskonstanten, welche erst gelöst werden müssen, um eine eindeutige Funktion der Verformungen zu bekommen. Die dazu benötigten Randbedingungen sind in den Wertigkeiten der Auflagern (bzw. Federungen) gegeben. Eine Auflagerwertigkeit korrespondiert mit einem übertragbaren Kraftpaar auf Kosten eines unterbunden Freiheitsgrades. Dieser unterbundene Freiheitsgrad wird mathematisch ausgedrückt mit der Bedingung

$$V_{(x_A)}^{(i)} = 0, \quad (5.163)$$

wenn  $V^{(i)}$  für eine beliebige Verformung und  $x_A$  für den Punkt des Auflagers stehen.

Weiters ist auch das Fehlen einer Schnittgröße eine Randbedingung der Form

$$V'_{(x_A)}^{(i)} = 0. \quad (5.164)$$

Knoten<sup>24</sup> (exklusive dem festen Anschluss) geben solche Bedingungen für spezi-

---

<sup>24</sup> Bei Randauflagern und Knoten wird dabei angenommen, dass an ihnen keine Einzellasten

elle Schnittgrößen, sind also der Form

$$S_{(x_K)}^{(i)} = 0 \quad (5.165)$$

mit  $x_K$ , dem Punkt des Knotens. Aber auch Randauflager<sup>24</sup> können ähnliche Zusatzinformationen enthalten. Kann ein Randauflager, eine Schnittgröße  $S^{(i)}$  nicht übertragen, so muss (aus Gleichgewichtsüberlegungen) besagte Schnittgröße am Punkt des Randauflegers  $x_R$  0 sein.

$$S_{(x_R)}^{(i)} = 0 \quad (5.166)$$

Besonders gilt dies für gelenkige Randauflager, wo gilt:

$$M(x) = 0 \quad (5.167)$$

Bei freien Enden ist Vorsicht geboten, da hier zwar auch alle Schnittgrößen verschwinden müssen, dies jedoch auch an dem Punkt  $x_F$  des freien Endes mittels Einzellast passieren kann. Gibt es für eine Schnittgröße keine Einzellast an einem freien Ende, so gilt

$$S_{(x_F)}^{(i)} = 0 \quad \text{bzw.} \quad S(x_F) = 0. \quad (5.168)$$

Natürlich muss man auch den Zusammenhang zwischen ungebundenen und gebundenen Größen berücksichtigen. So ist jede Bedingung der Form  $V_{(x)}^{(S_i)} = 0$ <sup>25</sup> (unter Annahme, dass es keine Momentenlast gibt) auch eine Bedingung der Form  $M_{(x)}^{(j)} = 0$ . Da sich die Querverschiebungen  $v$  und  $w$  aus zwei Termen ( $Z^{(u)}$  und  $Z^{(ü)}$ ) zusammensetzt, wird im Folgenden zwischen der Verformung aufgrund von Querkräften ( $u^{(u)}$  bzw.  $v^{(u)}$ ) und der Verformung aufgrund von Biegung ( $u^{(ü)}$ )

(der betrachteten Schnittgröße) einwirken. Bei Randauflagern ist dies eine Zwangsbedingung, da Auflagerreaktionen de facto nicht mehr als anders benannte Lasten sind und somit jede Last an diesem Punkt als Auflagerreaktion gezählt werden kann. Bei Knoten kann argumentiert werden, dass selbst wenn an dem Knotenpunkt eine Last einwirkt, diese Kraft nur auf einer Seite auf die Schnittgrößen wirkt. Von der anderen Seite läuft der Schnittgrößenverlauf sehr wohl gegen 0 und steigt dann am betrachteten Punkt sprungartig an.

<sup>25</sup>Da es zu einer Verwirrung von den Vertikalkräften  $V$  und den Verformungen  $V$  kommen könnte, wurden hier die Vertikalkräfte bewusst mit  $S_i$  gekennzeichnet.

bzw.  $v^{(ii)}$ ) unterschieden. So gilt z.B. bei  $\varphi_{(x)}^{(i)} = 0$  auch  $w_{(x)}^{(ii,j)} = 0$ . Dies kommt einer Vernachlässigung der Schubverformungen gleich.

Tabelle 5.2 stellt eine Übersicht über alle Randbedingungen da.

Allgemein müssen (trivialerweise) genau so viele Randbedingungen vorhanden sein, wie integriert wird. Für ungebundene Verformungen wäre dies bloß eine; für ungebundene würden sich drei ergeben. Unter der Bedingung jedoch, dass  $V_{(0)}=0$  lassen sie sich bloß auf zwei reduzieren.

Dazu betrachten wir die allgemeine gebundene Verformungsfunktion

$$V_{(x)}^{(g,i)} = \int \frac{S_{(x)}^{(g,i)}}{M_{(x)}^{(g,i)}} dx + \int \int \frac{S_{(x)}^{(ii,j)}}{M_{(x)}^{(ii,j)}}. \quad (5.169)$$

Durch Integration ergeben sich die Funktionen  $\Delta V_{(x)}^{(g,i)}$  und  $\Delta V_{(x)}^{(ii,j)}$  sowie die Integrationskonstanten  $C_{1,g}$ ,  $C_{1,ii}$  und  $C_{2,ii}$ :

$$V_{(x)}^{(g,i)} = \Delta V_{(x)}^{(g,i)} + C_{1,g} + \Delta V_{(x)}^{(ii,j)} + C_{1,ii} \cdot x + C_{2,ii} \quad (5.170)$$

Durch die Randbedingung  $V_{(0)} = 0$  verschwinden nun die Terme  $\Delta V_{(x)}^{(g,i)}$ ,  $\Delta V_{(x)}^{(ii,j)}$  und  $C_{1,ii} \cdot x$ , so dass lediglich

$$C_{1,g} = -C_{2,ii} \quad (5.171)$$

übrig bleibt. Setzt man dies in die Formel 5.170 ein, löschen sich besagte Integrationskonstanten aus und man hat mit einer Randbedingung zwei Integrationskonstanten gelöst.

### 5.4.2 Verzerrung aufgrund von lastfreien Einwirkungen

Bis jetzt wurde ausschließlich davon ausgegangen, dass Verzerrungen nur durch Lasten entstehen können. Tatsächlich können aber Verzerrungen durch eine Reihe von unterschiedlichen Phänomenen hervorgerufen werden. Die drei wichtigsten seien hier diskutiert:

- Kriechen

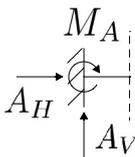
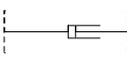
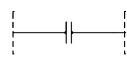
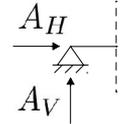
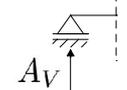
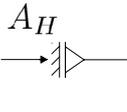
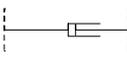
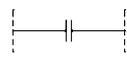
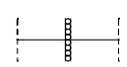
Punkt	Symbol	Randbedingungen
Eingespanntes Auflager		$u = 0$ $w = 0$ $\varphi = 0$ bzw. $(w'_{u,j} = 0)^3$
Längskraftmechanismus		$w = 0$ $\varphi = 0$ bzw. $(w'_{u,j} = 0)^3$ $(u' = 0)^1$
Querkraftmechanismus		$u = 0$ $\varphi = 0$ bzw. $(w'_{u,j} = 0)^3$ $(w'^{(u)} = 0)^1$ bzw. $(\varphi'' = 0)^{1,2}$
Festes Gelenklager		$u = 0$ $w = 0$ $(\varphi' = 0)^1$
Horizontales Loslager		$w = 0$ $(u' = 0)^1$ $(\varphi' = 0)^1$
Vertikales Loslager		$u = 0$ $(w'^{(u)} = 0)^1$ bzw. $(\varphi'' = 0)^{1,2}$ $(\varphi' = 0)^1$
Längskraftknoten		$u' = 0$
Querkraftknoten		$w'^{(u)} = 0$ bzw. $(\varphi'' = 0)^2$
Längsrollmechanismus		$u' = 0$ $\varphi' = 0$
Querrollmechanismus		$w'^{(u)} = 0$ bzw. $(\varphi'' = 0)^2$ $\varphi' = 0$
Freies Ende		$u' = 0$ $w'^{(u)} = 0$ bzw. $(\varphi'' = 0)^2$ $\varphi' = 0$
In dieser Tabelle steht - <sup>1</sup> für „bei einem Randaufleger“ - <sup>2</sup> für „unter Vernachlässigung der Schubverformung“ - <sup>3</sup> für „wenn es keine Momentenlast gibt“		

Tabelle 5.2: Randbedingungen für Verformungen

- Schwinden
- Temperaturverformung

Vorangestellt sei jedoch eine Bemerkung zur allgemeinen Natur dieser Einwirkungen. Diese Phänomene wirken sich als additive Terme im Verzerrungsvektor aus und werden einfach zu den Verzerrungen aufgrund von Lasten dazugezählt. In den oben (und auch weiter unten folgenden) Formeln ändert sich daher nichts.

### 1. Kriechen

Unter Kriechen versteht man die zeitabhängige Zunahme plastischer Verformungen und Dauerlast. Wirkt also eine Last langfristig auf ein Tragwerk ein, so beginnt dieses sich mit zunehmender Zeit zunehmend plastisch (nicht reversibel) zu verformen, wie in Abb. 5.40 dargestellt. Mathematisch wird Kriechen mithilfe einer Kriechzahl  $\varphi_K(t)$  beschrieben. Sie ist eine materialabhängige Funktion nach der Zeit und beschreibt, wie stark sich das Material zum Zeitpunkt  $t$  im Vergleich zur elastischen Verzerrung plastisch verformt hat.

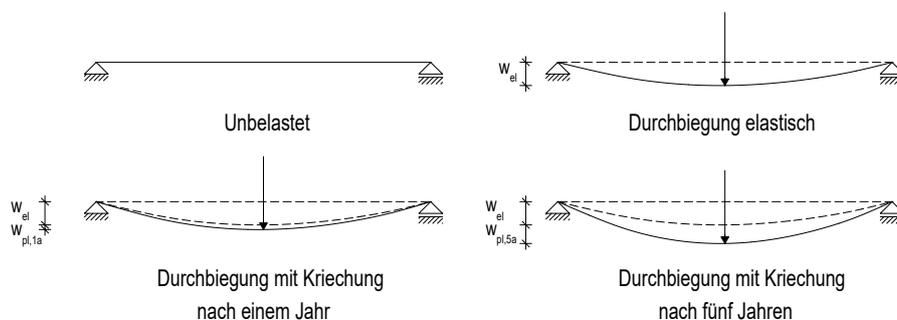


Abbildung 5.40: Auswirkung der Kriechung auf die Durchbiegung

Da das Kriechen von der Belastung abhängig ist, ist nur nachvollziehbar, dass man die Kriechverformung (welche als Kriechverzerrung angegeben ist), von der Last abhängig macht. Dies wird indirekt über die Spannungen vollzogen. Weiters hat sich herausgestellt, dass für die Kriechverzerrungen auch der Elastizitäts- bzw. der Schubmodul von Bedeutung sind. Anstatt sie jedoch in die materialabhängigen Kriechzahlen zu integrieren ist es eleganter, sie als eigene Faktoren anzuschreiben

und so die Zusammenhänge

$$\varepsilon_{(t)}^{(K)} = \varphi_{(t)}^{(K,\varepsilon)} \frac{\tilde{N}_{(t)}^{(x)}}{EA} = \varphi_{(t)}^{(K,\varepsilon)} \tilde{\varepsilon}_{(t)}^{(El)} \quad (5.172)$$

$$\gamma_{(t)}^{(K,i)} = \varphi_{(t)}^{(K,\gamma_i)} \frac{\tilde{V}_{(t)}^{(i)}}{GA} = \varphi_{(t)}^{(K,\gamma_i)} \tilde{\gamma}_{(t)}^{(El,i)} \quad (5.173)$$

$$\kappa_{(t)}^{(K,i)} = \varphi_{(t)}^{(K,\kappa_i)} \frac{\tilde{M}_{(t)}^{(i)}}{EI} = \varphi_{(t)}^{(K,\kappa_i)} \tilde{\kappa}_{(t)}^{(El,i)} \quad (5.174)$$

$$\vartheta_{(t)}^{(K)} = \varphi_{(t)}^{(K,\vartheta)} \frac{\tilde{M}_{(t)}^{(T)}}{GI_T} = \varphi_{(t)}^{(K,\vartheta)} \tilde{\vartheta}_{(t)}^{(El)} \quad (5.175)$$

zu erhalten. Der Index *El* bezeichnet die elastische Verzerrung. Sie ist gleich ihre korrespondierende Schnittgröße eine Funktion nach der Zeit, da sie natürlich nicht konstant sein muss. Der Überwelle kennzeichnet den nach Formel 5.176 berechneten Mittelwert:

$$\tilde{S}_{(t)}^{(i)} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} S_{(t)}^{(i)} dt \quad (5.176)$$

## 2. Schwinden

Unter Schwinden versteht man allgemein die Formänderung von Tragwerken im unbeanspruchten Zustand einzig und allein aufgrund ihres Erhärtungs- bzw. Austrocknungsvorganges. Primär sei hierbei an den Beton gedacht. Die Stärke des Schwindens hängt von vielerlei Faktoren wie Temperatur, Luftfeuchtigkeit und Betonzusammensetzung ab und deren Bestimmung sei den jeweiligen Spezialisten vorbehalten. Im Regelfall ist das Endresultat jedoch nichts weiteres, als ein Pauschalwert  $\varepsilon_S$ , weshalb wir hier ebenfalls mit solchem rechnen wollen.

Die Längsverzerrung  $\varepsilon$  ist die einzige, welche wir zu beachten brauchen, da Schwinden ein reiner Vorgang des gleichmäßigen Aufquellens bzw. Zusammenziehens ist und keine Krümmung oder Gleitungen anfallen. Es sei noch einmal erwähnt, dass nur die Längsdehnung  $\varepsilon$  in Stablänge beachtet werden muss, da die Maße quer zu Stabrichtung zu klein sind, um praktisch bedeutende Längsausdehnungen zu produzieren.

### 3. Temperaturverformung

Generell haben Materialien die Eigenschaft, sich unter Temperaturveränderung auszudehnen oder zusammenzuziehen. Hier müssen zwei Unterfälle unterschieden werden:

- Eine allgemeine Temperaturänderung des ganzen Querschnittes
- Ein Temperaturunterschied zwischen zwei Seiten (bzw. Oberflächen) des Stabes

Ähnlich wie beim Schwinden führt auch eine gleichmäßige Temperaturänderung eines Stabes dazu, dass der Stab sich gleichmäßig in alle Richtungen vergrößert oder verkleinert. Wird also ein ganzer Querschnitt durch gleichmäßige Temperaturänderung beansprucht, ergibt sich eine Längsdehnung  $\varepsilon$  in Richtung der Stabachse. Die Querausdehnungen normal zur Stabachse wurden wiederum vernachlässigt. Mathematisch wird die Temperaturverformung durch den Wärmeausdehnungskoeffizient  $\alpha_T$  beschrieben. Er wird in der Einheit  $1/K$  gemessen und gibt die Dehnung eines Stabes bei einem Temperaturanstieg von  $1K$  im Verhältnis zur Stabachse an. Weiters ist er materialspezifisch. Obwohl  $\alpha_T$  sich meist mit der Temperatur ändert, kann er für den in der Baupraxis aufzufindenden Temperaturbereich als konstant idealisiert werden. Mit ihm ergibt sich die Längsverzerrung  $\varepsilon$  eines Stabes als

$$\varepsilon_T = \alpha_T \Delta T. \quad (5.177)$$

Konträr dazu führt eine über den Querschnitt inkonstante Temperatur zu unterschiedlich starken Längsdehnungen am Querschnitt, was wie bei den höhenabhängigen Biegenormalspannungen zu einer Verdrehung  $\varphi$  führt. Aus Abbildung (Seite 111) erkennen wir den Zusammenhang

$$d\varphi = \frac{\alpha_T \Delta T dx}{h} \quad (5.178)$$

welcher, da wir  $\kappa$  als  $\frac{d\varphi}{dx}$  definieren als

$$\kappa = \frac{\alpha_T \Delta T}{h} \quad (5.179)$$

anschreibbar ist.

Bezeichnet nun

$$Z_{el} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{el} \\ \gamma_{y,el} \\ \gamma_{z,el} \\ \kappa_{y,el} \\ \kappa_{z,el} \\ \vartheta_{el} \end{pmatrix}$$

die Verzerrungen aufgrund von Lasteinwirkung,

$$Z_{(t)}^{(K)} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{(t)}^{(K)} \\ \gamma_{(t)}^{(K,y)} \\ \gamma_{(t)}^{(K,z)} \\ \kappa_{(t)}^{(K,y)} \\ \kappa_{(t)}^{(K,z)} \\ \vartheta_{(t)}^{(K)} \end{pmatrix}$$

die Verzerrungen aufgrund von Kriecherscheinungen,

$$Z_T = \begin{pmatrix} \varepsilon_T \\ 0 \\ 0 \\ \kappa_{y,T} \\ \kappa_{z,T} \\ 0 \end{pmatrix}$$

die Verzerrungen aufgrund von Temperaturänderung und

$$Z_S = \begin{pmatrix} \varepsilon_S \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

die Verzerrungen aufgrund von Schwinden, dann ergeben sich die Gesamtverzerrungen  $Z_g$  als

$$Z_g = Z_{el} + Z_K + Z_T + Z_S, \quad (5.180)$$

was eingesetzt

$$Z_{(x)}^{(g)} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{(x)}^{(g)} \\ \gamma_{(x)}^{(y,g)} \\ \gamma_{(x)}^{(z,g)} \\ \kappa_{(x)}^{(y,g)} \\ \kappa_{(x)}^{(z,g)} \\ \vartheta_{(x)}^{(g)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{N_{(x)}^{(x)}}{E(x)A(x)} + \varphi_{(x,t)}^{(K,\varepsilon)} \frac{\tilde{N}_{(x,t)}^{(x)}}{E(x)A(x)} + \alpha_{(x)}^{(t)} \Delta T(x) + \varepsilon_S \\ \frac{V_{(x)}^{(y)}}{G(x)A_{(x)}^{(Q)}} + \varphi_{(x,t)}^{(K,\gamma_y)} \frac{\tilde{V}_{(x)}^{(y)}}{G(x)A_{(x)}^{(Q)}} \\ \frac{V_{(x)}^{(z)}}{G(x)A_{(x)}^{(Q)}} + \varphi_{(x,t)}^{(K,\gamma_z)} \frac{\tilde{V}_{(x)}^{(z)}}{G(x)A_{(x)}^{(Q)}} \\ \frac{M_{(x)}^{(y)}}{E(x)I_{(x)}^{(y)}} + \varphi_{(x,t)}^{(K,\kappa_y)} \frac{\tilde{M}_{(x)}^{(y)}}{E(x)I_{(x)}^{(y)}} + \frac{\alpha_{(x)}^{(T)} \Delta T_{(x)}^{(y)}}{h_{(x)}^{(y)}} \\ \frac{M_{(x)}^{(z)}}{E(x)I_{(x)}^{(z)}} + \varphi_{(x,t)}^{(K,\kappa_z)} \frac{\tilde{M}_{(x)}^{(z)}}{E(x)I_{(x)}^{(z)}} + \frac{\alpha_{(x)}^{(T)} \Delta T_{(x)}^{(z)}}{h_{(x)}^{(z)}} \\ \frac{M_{(x)}^{(T)}}{G(x)I_{(x)}^{(T)}} + \varphi_{(x,t)}^{(K,\vartheta)} \frac{\tilde{M}_{(x)}^{(T)}}{G(x)I_{(x)}^{(T)}} \end{pmatrix} \quad (5.181)$$

ergibt. Dies kann nun wie gewohnt mit Formel 5.161 zu den Verformungen aufintegriert werden. Der Verzerrungsvektor  $Z_{(x)}^{(g)}$  wurde bewusst nicht als Funktion nach der Zeit definiert, obwohl Abhängigkeiten nach ihr in ihm vorhanden sind, da jedes Mal, wenn eine Abhängigkeit nach  $t$  geschrieben wurde, eigentlich die Größe zum Zeitpunkt  $t$  gemeint war, wodurch diese als einfache Zahl zu interpretieren ist.

### 5.4.3 Verformungen an Ecken, Gabelungen, gekrümmten Stäben und in externen Koordinatensystemen

Für Verformungen gilt derselbe Orientierungserhaltungssatz wie bei Schnittgrößen:

„Verformungen behalten bei Ecken ihre absolute (globale) Orientierung.“

Passender formuliert, kann man sagen:

„Die Verformung an zwei Seiten eines Punktes muss immer gleich groß sein.“

Dies ist offensichtlich, wenn man sich vor Augen führt, dass eine Ungleichheit der Verformungen bedeuten würde, dass in einem Schnitt dann das eine Schnittufer eine andere Lage im Raum hätte, als sein Gegenpart. Dies würde einer Abtrennung des Stabes gleichkommen, welche wir offensichtlicherweise ausschließen.

Gleich wie bei Schnittgrößen, sind demnach Verformungsübertragungen an Ecken reine Rotationen des lokalen Koordinatensystems des Stabes und können demnach mit der Gesamtrrotationsmatrix  $\underline{G}$  ausgedrückt werden. So gilt:

$$V_r = \underline{G}V_l \quad (5.182)$$

Da (wie vorausgesetzt) alle für die Verformungsberechnung wesentlichen Informationen im Schnittgrößenverlauf vorhanden sind, kann einfach von diesem Punkt weiter berechnet werden, ohne dass auf den vorhergehenden Stab noch einmal eingegangen werden muss, wie das bei der Berechnung von ungebundenen Schnittgrößen der Fall war.

Wir können Formel 5.182 noch auf Gabelungen anwenden. Dies ermöglicht die Verformung an allen Stäben einer Gabelung zu berechnen, sobald auch nur einer bekannt ist. Damit ist auch schon alles zu Gabelungen gesagt.

Diese Vorgangsweise ist auch bei einer Übertragung der Verformungen in ein externes Koordinatensystem anwendbar. Oft ist es nicht ausreichend Verformungen bloß relativ zur Stabsgeometrie zu beschreiben, sondern auch notwendig Lageänderungen in einem überlokalen bzw. globalen Koordinatensystem anzugeben. Hierfür kann man Formel 5.182 als eine Funktion nach der lokalen  $x$ -Achse des Stabes formulieren, mit der jeder Punkt einzeln transformiert wird.

Hierfür definieren wir die Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  als Funktionen nach der lokalen  $x$ -Achse. Sie geben die Differenz zwischen den Winkeln am Punkt  $x$  und den zugehörigen Winkel des globalen Koordinatensystems an; sind also einfache  $\Delta$ -Funktionen und messen den Winkel zwischen Stab am Punkt  $x$  und dem globalen Koordinatensystem.

Setzt man die Funktionen  $\alpha(x)$ ,  $\beta(x)$  und  $\gamma(x)$  in die Gesamtrrotationsmatrix  $\underline{G}$  ein, so erhält man einen Gesamtrrotationsoperator  $\underline{G}(x)$  als Funktion nach der lokalen  $x$ -Achse. Angewendet auf Formel 5.182 ergibt sich

$$V_{(x)}^{(gl)} = \underline{G}(x)V_{(x)}^{(lo)} \quad (5.183)$$

als eine Funktion, welche lokale Verformungen, in ein lokales Koordinatensystem transformiert.

#### 5.4.4 Biegelinie

Oft sind Verformungen gering genug, um ausschließlich die Durchbiegung zu beachten. Mathematisch bedeutet dies, dass die Verzerrungen  $\varepsilon$ ,  $\gamma$  und  $\vartheta$  klein genug sind, um als 0 angenommen zu werden. Die einzige Verzerrung, die dann noch zu beachten ist, ist die Krümmung  $\kappa$  und die dadurch entstehende Durchbiegungen  $v$  und  $w$  (Der Einfachheit halber, wird im folgenden Abschnitt nur die Verformung  $w$  behandelt, aus Symmetriegründen gilt diese Überlegung natürlich aber auch für  $v$ ). Da aber  $\gamma = 0$  ist, entfällt der gebundene Charakter der Vertikalverschiebung und so gilt folgender Zusammenhang:

$$q_z = \frac{d^4 w}{dx^4} EI \quad (5.184)$$

Durch (mehrfache) Integration ergeben sich dann verschiedenste Verläufe:

Lastverlauf	$q_z(x) = \frac{d^4 w}{dx^4} EI = w'''' EI$
Querkraftverlauf	$Q_z(x) = \frac{d^3 w}{dx^3} EI = w''' EI$
Momentenverlauf	$M_y(x) = \frac{d^2 w}{dx^2} EI = w'' EI$
Verdrehungswinkel	$\varphi_y(x) = \frac{dw}{dx} EI = w' EI$
Biegelinie	$w EI$

Oft werden die Formeln der Querkraft-, Momenten- und Verdrehungswinkelverlauf auch mit einem Minuszeichen versehen, dessen Ursprung die Richtungskonvention von Schnittgrößen und Verformungen ist. Wir sehen jedoch die Orientierung von Größen als beliebig an und so sei es dem Anwendungsfall überlassen, Minuszeichen einzuziehen.

Durch 4-fache Integration des Lastverlaufes ergeben sich vier Integrationskonstanten, welche mit  $C_1$  bis  $C_4$  bezeichnet werden.  $C_1$  ist dabei jene Schnittgröße, die bei der Integration von  $q_z(x)$  auf  $V_z(x)$  entsteht und entspricht einem Anfangswert des Querkraftverlaufes.  $C_2$  entspricht dementsprechend einem Anfangswert des Momentenverlaufes.  $C_3$  würde eine Vorspannung (also eine Anfangsverdrehung) charakterisieren und  $C_4$  eine Anfangsverschiebung bzw. eine Anfangsabsenkung.

Es braucht dementsprechend vier Anfangsbedingungen, um die Biegelinie zu lösen. Solche ergeben sich wieder aus Auflager, Knoten und freien Stabenden und sind in Tabelle 5.3 aufgelistet:

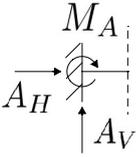
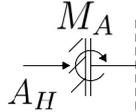
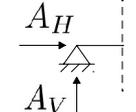
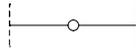
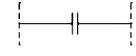
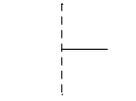
Punkt	Symbol	Bedingungen
Eingespanntes Auflager		$w = 0$ $w' = 0$
Verschiebliche Quereinspannung		$(Q = 0)^1$ bzw. $(w''' = 0)^1$ $w' = 0$
Gelenkige Auflager <sup>26</sup>		$w = 0$ $(M = 0)^1$ bzw. $(w'' = 0)^1$
Gelenk		$M = 0$ bzw. $w'' = 0$
Querkraftmechanismus		$Q = 0$ bzw. $w''' = 0$
Freies Ende		$M = 0$ bzw. $w'' = 0$ $Q = 0$ bzw. $w''' = 0$
In dieser Tabelle steht - <sup>1</sup> für „bei einem Randauflager“		

Tabelle 5.3: Randbedingungen für die Biegelinie

Für Formel 5.184 wurden einige Annahmen gemacht, welche jetzt diskutiert werden sollen:

1. Die Biegesteifigkeit  $EI$  ist über die Stablänge konstant.
2. Es wirken keine Linienmomente  $m_y$ .
3. Es treten nur elastische Verformungen auf.

<sup>26</sup>Mit „Gelenkige Auflager“ sind alle Auflager gemeint, welche Querkräfte übertragen, aber keine Momente. Das feste Gelenklager, wurde nur repräsentativ gewählt.

Annahme 1) ist im Regelfall wahr. Eine Änderung der Biegesteifigkeit kann jedoch auch leicht berücksichtigt werden indem man  $E$  und  $I$  als Funktionen nach der Stablänge  $x$  formuliert.

Annahme 2) entspricht einer Vernachlässigung des gebundenen Charakters des Biegemomentes, also dass sich  $M_y$  aus zwei Thermen zusammensetzt. Oft ist diese Annahme gerechtfertigt, sollten jedoch Linienmomente einwirken, so muss  $M_y$  aus seinen beiden Thermen  $\Phi_g$  und  $\Phi_{\ddot{u}}$  berechnet werden. Das bedeutet, dass dann die Differenzialzusammenhänge erst ab der Momentenformel gelten.

Annahme 3) ist im Regelfall auch wahr oder vernachlässigbar. Treten jedoch auch nichtelastische Einwirkungen auf, so beschränken sich die oben genannten Zusammenhänge auf die elastischen Verformungen  $w_{el}$  und können mit

$$w_{ges} = w_{el} + w_{ne} \quad (5.185)$$

zur Gesamtdurchbiegung aufaddiert werden, wenn  $w_{ne}$  die Durchbiegung aufgrund nichtelastischen Einwirkungen ist.

Zuletzt sei noch der Fall von Einzellasten besprochen. In der Standardliteratur wird davon ausgegangen, dass  $q(x)$  alleinig aus Linienlasten besteht oder sollten sie doch einwirken, so werden sie als Unstetigkeitsstellen gesehen, so dass nur zwischen ihnen integriert werden kann. Dies kann jedoch durch den Integrationsformalismus wie in Abschnitt 5.3.2 vermieden werden.

# Kapitel 6

## Arbeit - Zusammenhang zwischen Weg- und Kraftgrößen

### 6.1 Arbeit im Kontext der Physik

Die Arbeit ist eine für die Tragwerkslehre unabdingbare Größe. Sie besitzt das Formelzeichen  $A$  und ist definiert als das Skalarprodukt zwischen Kraft  $F$  und Weg  $s$ .

$$A = F \cdot s \quad (6.1)$$

In nicht vektorieller Schreibweise schreibt man

$$A = F \cdot s \cdot \cos(\alpha). \quad (6.2)$$

wobei  $\alpha$  der Winkel zwischen der Kraft und dem Weg ist. Der Bedeutungszusammenhang zwischen  $F$  und  $s$  ist jener, dass  $s$  jene Strecke ist entlang derer  $F$  wirkt bzw. dass  $s$  jene Strecke ist, die aufgrund  $F$  zurückgelegt wurde.

Das Prinzip der Arbeit kann verallgemeinert werden zu einem Skalarprodukt zwischen einer beliebigen Kraftgröße mit einer ihr zugeordneten<sup>1</sup> (aber ansonsten

---

<sup>1</sup>Eine Weggröße ist einer Kraftgröße zugeordnet, wenn besagte Kraftgröße eine Beschleunigung beschreibbar von der Weggröße verursacht.

auch beliebigen) Weggröße. So kann man auch Arbeit per Drehmoment als

$$A = M \cdot \theta \quad \text{bzw.} \quad A = M \cdot \theta \cdot \cos(\alpha) \quad (6.3)$$

definieren, wenn kein Vektorformalismus verwendet wird und  $\alpha$  der Winkel zwischen Drehmomentvektor und Winkelvektor ist.

Zuletzt sei noch angemerkt, dass Formel 6.1, 6.2 und 6.3 sich nur auf Fälle beziehen, in dem die Kraftgröße über den Weg konstant bleibt. Ist dies nicht der Fall so ergeben sich diese Formeln als

$$A = \int_s F(s) ds \quad \text{bzw.} \quad A = \int_s F(s) \cos(\alpha(s)) ds \quad (6.4)$$

und

$$A = \int_s M(\theta) d\theta \quad \text{bzw.} \quad A = \int_s M(\theta) \cos(\alpha(\theta)) d\theta. \quad (6.5)$$

Nun soll die Arbeit noch kurz in einen physikalischen Kontext gesetzt werden, auch wenn dies für die folgenden Betrachtungen wenig von Einfluss ist.

In der Physik ist die Arbeit jene Menge an Energie  $\Delta E$ , welche auf mechanischem Wege umgesetzt wird.

$$A = \Delta E \quad (6.6)$$

Man spricht, dass „am Körper Arbeit verrichtet oder geleistet“ wird. In der Physik ist oft die Größe  $W$  (engl. für work) gebräuchlich und besitzt die Einheit  $J$  (Joule). Energie ist physikalisch definiert, als jene Größe, die aufgrund der Zeitinvarianz der Naturgesetze erhalten bleibt, also weder entstehen noch vergehen kann. Dies ist allgemein hin bekannt, als der „Erhaltungssatz der Energie“. In einführender Literatur wird Energie oft als die Fähigkeit bezeichnet auf ein anderes System einzuwirken bzw. Arbeit an ihm zu verrichten.

Energie kann in verschiedenen Energieformen vorkommen, beispielsweise potentielle, kinetische, elektrische, chemische und thermische Energie. Dementsprechend gibt es auch mehrere Arbeitsformen wie Hubarbeit, Beschleunigungsarbeit, Verformungsarbeit und elektrische Arbeit. Weiters gibt es noch die Wärme  $Q$ , welche die Änderung der Energie auf thermischen Wege beschreibt.

Zum Abschluss sei noch kurz der Begriff Potenzial  $\Phi$  definiert. Das Potenzial misst die Fähigkeit eines Feldes Arbeit verrichten zu können. Ein Feld ist ein Raum, in dem jedem Punkt ein Wert (in dem Fall das Potential) zugeschrieben wird. Das Potential gibt also für jeden Punkt eine Energie an, die das Teilchen hätte, wenn es sich an diesem Punkt befinden würde. Ein anschauliches Beispiel hierfür wäre das Gravitationsfeld der Erde.

Ein Potentialfeld kann in ein (konservatives<sup>2</sup>) Kraftfeld umgewandelt werden. Ein Kraftfeld ist ein Feld, in dem jedem Punkt eine Kraft zugeordnet wird.

$$F(r) = -q\nabla\Phi(r) \quad (6.7)$$

Hierbei ist

- $F(r)$  die Kraft am Punkt  $r$ .
- $q$  der Potentialträger. Beispiele hierfür wären Masse oder Ladung.
- $\nabla$  der Gradient. Er ist ein Operator der Form

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

- $\Phi(r)$  das Potential am Punkt  $r$ .

Diese Operation gibt also für jeden Punkt eines Potentialfeldes eine Kraft an, in Richtung der größten Potentialabnahme.

Handelt es sich um ein konservatives Kraftfeld, so gilt folgender Zusammenhang:

$$A = V(r_2) - V(r_1) \quad (6.8)$$

Umgekehrt ist dann das Potential eines Punktes gleich der Arbeit, welche verrichtet werden muss, um einen Körper zu diesem Punkt zu bringen.

---

<sup>2</sup>„Konservativ“ ist ein Fachbegriff der Physik, welcher im Wesentlichen bedeutet, dass der Energieerhaltungssatz gilt.

## 6.2 Formänderungsarbeit

Nach diesem kurzen Ausflug in die Mechanik, sei nun die Arbeit in den Kontext der Statik gesetzt.

Hierfür seien noch einmal die Vektoren

$$F = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P = \begin{pmatrix} F \\ M \end{pmatrix}$$

für *äußere Kraftgrößen* in Erinnerung gerufen. Äquivalent kann man die Vektoren

$$u = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \quad \varphi = \begin{pmatrix} \vartheta \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad V = \begin{pmatrix} u \\ \varphi \end{pmatrix}$$

bilden. Greift nun ein Kraftgrößenvektor  $P$  an einem Stabkörper an und verursacht die infinitesimale Verformung  $dV$ , so verrichtet er die Arbeit

$$\begin{aligned} dA_a &= P^T dV \\ &= F^T du + M^T d\varphi \\ &= F_x du + F_y dv + F_z dw + M_T d\vartheta + M_y d\varphi_y + M_z d\varphi_z \end{aligned} \quad (6.9)$$

Es sei noch einmal herausgestellt, dass dies die äußere Arbeit ist. Im Gegensatz zu ihr lässt sich nämlich auch eine innere Arbeit  $A_i$  definieren. Dafür betrachten wir den Schnittgrößenvektor

$$S = \begin{pmatrix} N_x \\ V_y \\ V_z \\ M_T \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}, \quad (6.10)$$

den Verzerrungsvektor  $Z$

$$Z = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \gamma_y \\ \gamma_z \\ \vartheta' \\ \kappa_y \\ \kappa_z \end{pmatrix}, \quad (6.11)$$

und bilden die innere Arbeit

$$\begin{aligned} dA_i &= S^T Z dx \\ &= N\varepsilon dx + V_y\gamma_y dx + V_z\gamma_z dx + M_T\vartheta' dx + M_y\kappa_y dx + M_z\kappa_z dx \end{aligned} \quad (6.12)$$

Die in den Formeln 6.10 und 6.11 verrichtete Arbeit nennen wir Verformungsarbeit. Sie setzt sich aus der Eigenarbeit (aktiven Arbeit) und der Verschiebungsarbeit (passiven Arbeit) zusammen. Als Eigenarbeit wird jene Arbeit bezeichnet, welche entlang von Wegen verrichtet wird, die die Kräfte selbst hervorrufen (z.B. Lasten entlang ihrer von ihnen hervorgerufenen Verformungen). Als Verschiebungsarbeit bezeichnet man jene Arbeit die entlang eines Weges verrichtet wird, den die Kraft nicht hervorruft (also Kräfte entlang nicht von ihnen hervorgerufenen Verschiebungen).

Eigenarbeit kann immer nur von Lasten verursacht werden, da sie die einzigen Kraftgrößen sind, welche Verformungen hervorrufen. Verschiebungsarbeit dagegen kann von Temperatureinwirkungen, Kriechen, Schwinden und Zwangsverformungen hervorgerufen werden, indem sie die Lasten entlang der von ihnen erzeugten Verformung wirken lassen.

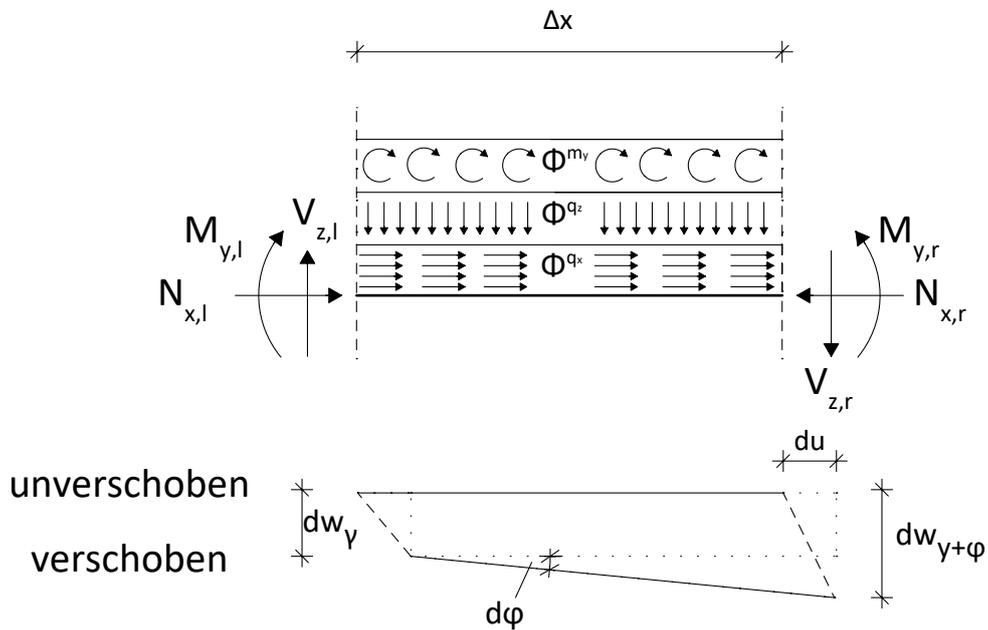


Abbildung 6.1: Skizze zur Herleitung der Verschiebungsarbeit

Zur Formulierung der Verschiebungsarbeit  $A^*$  betrachten wir ein ebenes, sich im Gleichgewicht befindlichen Stabteil wie in Abbildung 6.1. Dieser Stabteil sei von verschiedenen Lastfällen  $\Phi^{(q_x)}$ ,  $\Phi^{(q_z)}$  und  $\Phi^{(m_y)}$ <sup>3</sup> belastet, wodurch die Schnittgrößen  $N_{x,l}$ ,  $V_{z,l}$ ,  $M_{y,l}$ ,  $N_{x,r}$ ,  $V_{z,r}$  und  $M_{y,r}$  hervorgerufen werden. Dieser Stabteil wird nun von einem externen Einfluss (also nicht von den Lasten) verschoben<sup>4</sup>. Die an dem Stabteil angreifenden Lasten führen nun zu einer äußeren Verschiebearbeit  $A_a^*$  gemäß:

$$A_a^* = \int_{\Delta x} \Phi_{(x)}^{(q_x)} du(x) + \Phi_{(x)}^{(q_z)} dw(x) + \Phi_{(x)}^{(m_y)} d\varphi_{(y)} \quad (6.13)$$

Gleichzeitig leisten die Schnittgrößen nun auch eine innere Verschiebungsarbeit

<sup>3</sup>Hier wird der Lastfall  $\Phi$  als Platzhalter sowohl für Linienlasten, als auch Einzellasten verwendet. Einzellasten sollen dann mit Dirac-Delta-Funktion beschrieben werden bzw. können auch in einen Summenformalismus (gemäß Abschnitt 5.3.2) umgewandelt werden. Dann ergibt sich für die Einzellasten eine Summe aller Kräfte mal den Verschiebungen ihrer Angriffspunkte.

<sup>4</sup>In diesem Kontext ist Verschiebung ebenfalls eine Art der Verformung. Um jedoch zwischen Verformung durch Lasten und Verformung durch externen Einflüssen zu unterscheiden, benutzt man das Wort „verschoben“.

gemäß:

$$A_i^* = \int_{\Delta x} \left( N(x)\varepsilon(x) + V_{(x)}^{(z)}\gamma_{(x)}^{(z)} + M_{(x)}^{(y)}\kappa_{(x)}^{(y)} \right) dx \quad (6.14)$$

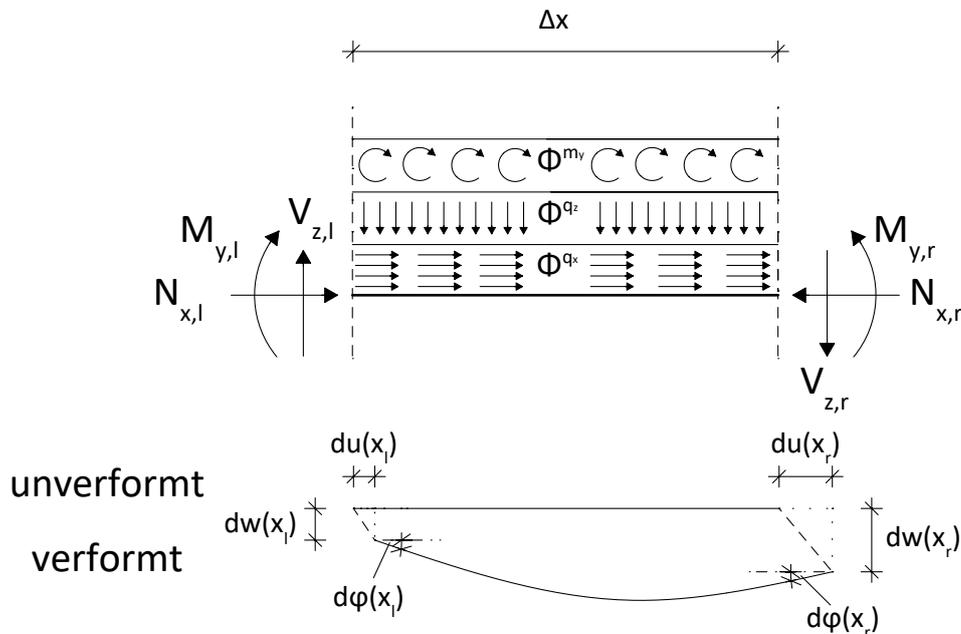


Abbildung 6.2: Skizze zur Herleitung der Verformungsarbeit

Äquivalent können die Verschiebungen des Stabteils auch durch die Lasten selbst entstehen (wie in Abbildung 6.2 dargestellt). Die Verschiebungen werden dann zu Verformungen und die Verschiebungsarbeit  $A^*$  zur Eigenarbeit  $A$ . Wir können nun wieder die äußere Arbeit als

$$A_a = \frac{1}{2} \int_{\Delta x} \Phi_{(x)}^{(qx)} du(x) + \Phi_{(x)}^{(qz)} dw(x) + \Phi_{(x)}^{(my)} d\varphi(x) \quad (6.15)$$

formulieren, während die innere Arbeit

$$A_i = \frac{1}{2} \int_{\Delta x} \left( N(x)\varepsilon(x) + V_{(x)}^{(z)}\gamma_{(x)}^{(z)} + M_{(x)}^{(y)}\kappa_{(x)}^{(y)} \right) dx \quad (6.16)$$

ist.

Der Faktor  $\frac{1}{2}$  ergibt sich aus der Annahme eines linear elastischen Baustoffes. In

einem linear elastischen Baustoffes gilt das Hook'sche Gesetz

$$S^{(i)} = c^{(i)} V^{(i)}, \quad (6.17)$$

wobei  $S^{(i)}$  für eine beliebige Kraftgröße,  $V^{(i)}$  für eine mit dieser Kraftgröße korrespondierende Verformungsgröße und  $c^{(i)}$  für einen beliebigen Proportionalitätsfaktor stehen. Setzen wir dies in das Integral für die Arbeit ein, so erhalten wir

$$A = \int c^{(i)} V^{(i)} dV = \frac{1}{2} V^{(i)2} c^{(i)}, \quad (6.18)$$

was sich mit  $c^{(i)} = \frac{S^{(i)}}{V^{(i)}}$  als

$$A = \frac{1}{2} V^{(i)} S^{(i)} \quad (6.19)$$

ergibt. Dies können wir infinitesimal klein werden lassen und erhalten so

$$dA = \frac{1}{2} S^{(i)} dV^{(i)} \quad \text{bzw.} \quad A = \frac{1}{2} \int S^{(i)} dV^{(i)} \quad (6.20)$$

was angewendet auf das Stabelement, die Formeln 6.15 und 6.16 ergibt. Intuitiver formuliert könnte man sagen, dass der Faktor  $\frac{1}{2}$  sich als Attribut des linear elastischen Charakters des Materials ergibt.

Innere und äußere Arbeit werden nun in den Arbeitssätzen miteinander verbunden:

$$A_a^* = A_i^* \quad (6.21)$$

$$A_a = A_i \quad (6.22)$$

Sie sind Forderungen an den Energieerhaltungssatz, welcher besagt, dass die Summe der geleisteten Arbeit in einem System sich ausgleichen muss (was intuitiv bedeutet, dass die Energie die in ein System gebracht wird, entweder wieder das System verlassen oder innerhalb gespeichert werden muss). Sie lassen sich nachvollziehen, wenn man argumentiert, dass die Arbeit die von inneren und äußeren Kräften über einen Weg verrichtet wird, betragsweise gleich groß, jedoch umgekehrt gerichtet sein muss, da (wie aus den Ausführungen über Schnittgrößen bekannt) die inneren Kräfte gleich groß jedoch umgekehrt gerichtet den äußeren Lasten sind. Nur so kann Gleichgewicht herrschen, was wir voraussetzen. Da

Schnittkräfte und Lasten denselben Weg zurücklegen müssen sie sich ausgleichen. Formel 6.21 besagt intuitiv, dass an einem sich in Gleichgewicht befindlichen Stab bei Verschiebungen keine Arbeit geleistet werden muss. Sie besagt also, dass man zur Verschiebung eines insolierten Stabes keine Energie aufbringen muss.

Formel 6.22 kann dagegen als Formulierung des linearen Werkstoffcharakters interpretiert werden. Es besagt, dass jene Energie die zur Verformung eines Tragwerkes benötigt wird in den inneren Schnittgrößen gespeichert wird und nach Wegfallen der äußeren Belastung wieder freigelassen wird. Nichts anderes versteht man unter Elastizität.

Beide Arbeitsätze lassen sich nun zum Gesamtarbeitssatz vereinen:

$$A_{ges,a} = A_{ges,i}, \quad (6.23)$$

was sich auch als

$$A_a^* + A_a = A_i^* + A_i \quad (6.24)$$

lesen lässt.

### 6.3 Prinzip der virtuellen Arbeit

Eine Größe wird als virtuell bezeichnet, wenn sie imaginären (gedachten) Ursprung ist. Damit ist nicht gemeint, dass die untersuchte Größe bloß dem Modell entspringt und keine Realität besitzt, sondern bloß dass die Größe eigentlich nicht einmal im Modell existiert, bloß angenommen wird um andere Größen berechenbar zu machen.

Dieses Prinzip wird in der Statik durch das Prinzip der virtuellen Arbeit vertreten. Virtuelle Arbeit kann entweder von gedachten Kräften entlang echten Verformungen oder von echten Kräften entlang gedachten Verformungen verrichtet werden. Diese Prinzipien nennt man „Prinzip der virtuellen Kräfte“ und „Prinzip der virtuellen Verschiebungen“. Sie sollen im Folgenden näher untersucht werden. Zuerst jedoch sei die Notation von virtuellen Größen geregelt. Virtuelle Größen werden durch Überstriche gekennzeichnet (z.B.  $\overline{F}$ ,  $\overline{A}$ ,  $\overline{u}$ ).

#### 1. Prinzip der virtuellen Kräfte

Beim Prinzip der virtuellen Kräfte wird ein realer Verschiebungszustand mit einem virtuellen Kräftezustand überlagert. Angewendet auf den Verschiebungsarbeitssatz ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \overline{W}^* &= \overline{W}_a^* + \overline{W}_i^* \\
 &= \int_{\Delta x} \overline{\Phi}_{(x)}^{(q_x)} du(x) + \overline{\Phi}_{(x)}^{(q_z)} dw(x) + \overline{\Phi}_{(x)}^{(m_y)} d\varphi_{(x)}^{(y)} \\
 &\quad - \int_{\Delta x} \left( \overline{N}_{(x)} \varepsilon(x) + \overline{V}_{(x)}^{(z)} \gamma_{(x)}^{(z)} + \overline{M}_{(x)}^{(y)} \kappa_{(x)}^{(y)} \right) dx \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{6.25}$$

Da bei Betrachtung mit virtuellen Belastungszustand jener meistens beliebig gewählt werden kann, limitiert man sich zur Einfachheit verständlicherweise auf Einzellasten  $Q_i$ , womit sich Formel 6.25 mit

$$\begin{aligned}
 \overline{W}^* &= \overline{W}_a^* + \overline{W}_i^* \\
 &= \sum_k \left( \overline{Q}_{x,k} u_k + \overline{Q}_{z,k} w_k + \overline{M}_{y,k} \varphi_{y,k} \right) \\
 &\quad - \int_{\Delta x} \left( \overline{N}_{(x)} \varepsilon(x) + \overline{V}_{(x)}^{(z)} \gamma_{(x)}^{(z)} + \overline{M}_{(x)}^{(y)} \kappa_{(x)}^{(y)} \right) dx \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{6.26}$$

ergibt, wobei eine allgemeine Verformungen  $V_k$  jeweils die Verformung am Punkt  $k$  (jener Punkt an dem die Last  $k$  einwirkt) darstellt.

Wir werden später dieses Prinzip verwenden, um die Verformungen einzelner Tragwerkspunkte zu ermitteln.

## 2. Prinzip der virtuellen Verschiebungen

Hier wird, umgekehrt zum vorherigen Prinzip, ein echter Belastungszustand mit einem virtuellen Verschiebungszustand überlagert. Wir schreiben dies

als

$$\begin{aligned}
 \overline{W}^* &= \overline{W}_a^* + \overline{W}_i^* \\
 &= \int_{\Delta x} \Phi_{(x)}^{(q_x)} d\overline{u}(x) + \Phi_{(x)}^{(q_z)} d\overline{w}(x) + \Phi_{(x)}^{(m_y)} d\overline{\varphi}_{(x)}^{(y)} \\
 &\quad - \int_{\Delta x} \left( N_{(x)} \overline{\varepsilon}(x) + V_{(x)}^{(z)} \overline{\gamma}_{(x)}^{(z)} + M_{(x)}^{(y)} \overline{\kappa}_{(x)}^{(y)} \right) dx \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{6.27}$$

Auch hier können wir wieder die Lastfälle als die Summe aus Einzellasten und Linienlasten sehen. Diesmal jedoch können Linienlasten nicht mehr ausgeschlossen werden. Es ergibt sich also

$$\begin{aligned}
 \overline{W}^* &= \overline{W}_a^* + \overline{W}_i^* \\
 &= \sum_k \left( N_{x,k} \overline{u}_k + V_{z,k} \overline{w}_k + M_{y,k} \overline{\varphi}_{y,k} \right) \\
 &\quad + \sum_k \int_{x_k}^{x_m} \left( q_{(x)}^{(N_x)} \overline{u}(x) + q_{(x)}^{(V_z)} \overline{w}(x) + q_{(x)}^{(M_y)} \overline{\varphi}_{(x)}^{(y)} \right) dx \\
 &\quad - \int_{\Delta x} \left( N_{(x)} \overline{\varepsilon}(x) + V_{(x)}^{(z)} \overline{\gamma}_{(x)}^{(z)} + M_{(x)}^{(y)} \overline{\kappa}_{(x)}^{(y)} \right) dx \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{6.28}$$

wobei hierbei  $x_k$  für den Anfangspunkt und  $x_m$  für den Endpunkt der Linielast  $k$  stehen. Mithilfe dieses Prinzips werden die Auflagerreaktionen von statisch unbestimmten Tragwerken ermittelt.

### 6.3.1 Die Sätze von Betti und Maxwell

Die Sätze von Betti und Maxwell formulieren welche Arbeit zwei Lastfälle an einem Tragwerk verrichten, und wie sie sich gegenseitig beeinflussen. Sie werden in den folgenden Betrachtungen zu den Anwendungen der Prinzipien der virtuellen Arbeit oft als Axiome vorausgesetzt, weshalb wir sie hier kurz beweisen wollen.

### Der Satz von Betti

„Wird ein Stab hintereinander durch zwei Lastenfälle belastet, so ist die Gesamtarbeit unabhängig davon, welche Lastgruppe zuerst aufgebracht wird.“

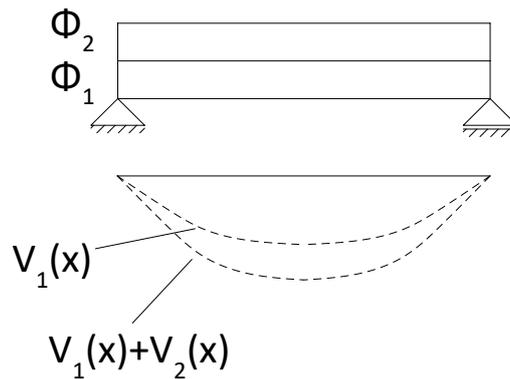


Abbildung 6.3: Skizze zum Satz von Betti

Mathematisch lässt sich dies als

$$W_{1,2} = W_{2,1} \quad (6.29)$$

schreiben, wobei die Reihenfolge der Index die Reihenfolge der Belastung angibt. Formel 6.29 lässt sich leicht herleiten, wenn man für den Last- und Verformungsfall wie in Abb. 6.3 den Gesamtarbeitssatz formuliert. Da die inneren Kräfte (sprich die Schnittgrößen) nur von der Gesamtbelastung abhängen, die Verformungen wiederum nur von den Schnittgrößen, die Gesamtbelastung jedoch unabhängig davon ist, welche Lastgruppe zuerst aufgebracht wurde, folgt dass die innere Energie (als Produkt aus Schnittgröße und Verformung) in beiden Fällen gleich groß ist. Aus dem Gesamtarbeitssatz folgt daraus aber

$$W_{1,2} = W_{2,1}. \quad (6.30)$$

Wir können die Gesamtarbeitstherme durch ihre Komponenten anschreiben und erhalten:

$$W_1 + W_2 + W_{1,2}^* = W_2 + W_1 + W_{2,1}^* \quad (6.31)$$

Hier steht  $W_i$  für die Verformungsarbeit die der Lastfall  $i$  während der Aufbringung leistet und  $W_{i,j}^*$  für die Verschiebungsarbeit die der Lastfall  $i$  entlang der Verformung aufgrund Lastfall  $j$  leistet, wenn der Lastfall  $j$  aufgebracht wird. Offensichtlicherweise lässt sich Gleichung 6.31 kürzen und man erhält

$$W_{1,2}^* = W_{2,1}^* \quad (6.32)$$

was oft, als der eigentliche Satz von Betti gehandelt wird.

### Satz von Maxwell

„Die Arbeit die eine Kraftgröße  $i$  entlang der Verformung aufgrund der Last  $j$  verrichtet ist gleich jener, welche eine Kraftgröße  $j$  entlang der Verformung aufgrund  $i$  verrichtet.“

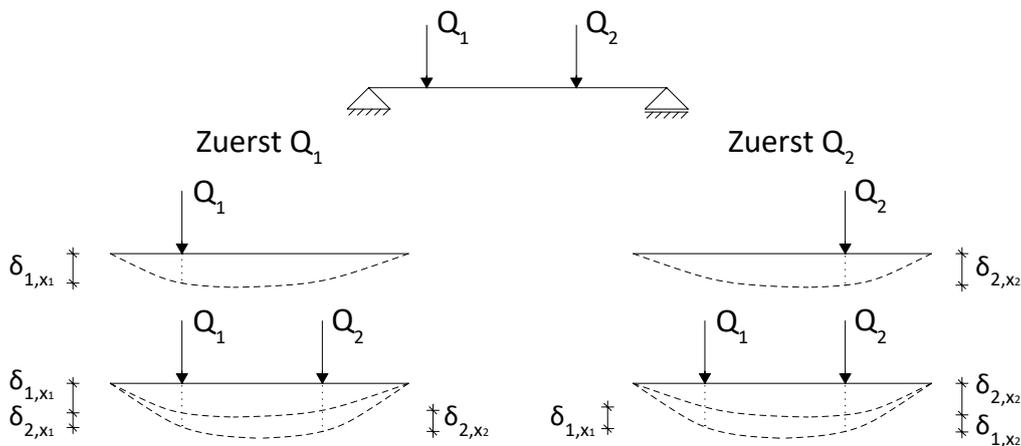


Abbildung 6.4: Skizze zum Satz von Maxwell

Der Satz von Maxwell ist also ein Sonderfall des Satz von Betti in dem die Lastfälle bloß aus einer einzigen Kraftgröße bestehen. Hierfür betrachten wir einen Stab, wie in Abbildung 6.4, welcher von zwei Einzellasten  $Q_1$  und  $Q_2$  in den Punkten  $x_1$  und  $x_2$  belastet ist. Der Satz von Betti sagt dann, dass  $W_{1,2}^* = W_{2,1}^*$ . Die Verschiebungsarbeit die eine beliebige der Lasten dann verrichtet ergibt sich mit  $Q_i * \delta_{x_i}$ , wobei  $i$  für eine beliebige der beiden Lasten stehen kann. Die

Verformung am Punkt  $x_i$  wird nun aber bei einer Verschiebung von der Last  $j$  eingepreßt, weshalb wir  $\delta_{x_i}$  als  $\delta_{j,x_i}$  bezeichnen können, was so viel bedeutet wie die Verformung am Punkt  $x_i$  aufgrund der Belastung durch  $Q_j$ . Setzen wir dies in den Satz von Betti ein, erhalten wir

$$Q_1 \delta_{2,x_1} = Q_2 \delta_{1,x_2}, \quad (6.33)$$

was oft auch einfach als

$$Q_1 \delta_{2,1} = Q_2 \delta_{1,2} \quad (6.34)$$

geschrieben wird. Wie wir später noch sehen werden, werden virtuelle Kraftgrößen oft einfach mit „1“ angenommen, wodurch sich Formel 6.34 als

$$\delta_{1,2} = \delta_{2,1} \quad (6.35)$$

ergibt. Der Satz von Maxwell wird daher auch oft als Satz der Vertauschbarkeit der Indizes bezeichnet.

Zu den beiden Sätzen sei noch folgendes gesagt:

Die Beweise beider Sätze wurden bewusst verallgemeinert gehalten, so dass sie sowohl für Kräfte und Momenten, als auch für jede beliebige Kombination der beiden gelten. Dadurch geben uns die Sätze ein vielseitiges Werkzeug in die Hand, dessen Verwendung wir nun untersuchen wollen.

## 6.4 Berechnung der Verformung von einzelnen Tragwerkspunkten mittels Prinzip der virtuellen Kräfte

Der Grundgedanke dieses Algorithmus ist das man einen virtuellen Belastungszustand entlang einem realen Verformungszustandes Verschiebungsarbeit verrichten lässt. Wie wir aus dem Arbeitssatz der Verschiebungsarbeit wissen, muss sich diese auf 0 ausgleichen. Es gilt also

$$W_a^* = W_i^* = 0. \quad (6.36)$$

Wenn  $\bar{\Phi}_{(x)}$  ein beliebiger virtueller Lastfallvektor der Form

$$\bar{\Phi}_{(x)} = \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_{(x)}^{(qx)} \\ \bar{\Phi}_{(x)}^{(qy)} \\ \bar{\Phi}_{(x)}^{(qz)} \\ \bar{\Phi}_{(x)}^{(m_T)} \\ \bar{\Phi}_{(x)}^{(m_y)} \\ \bar{\Phi}_{(x)}^{(m_z)} \end{pmatrix},$$

der reale Verformungsvektor durch den realen Lastfall  $\phi_{(x)}$ , so dass

$$\delta_{(x)} = \begin{pmatrix} u_{(x)} \\ v_{(x)} \\ w_{(x)} \\ \vartheta_{(x)} \\ \varphi_{(x)}^{(y)} \\ \varphi_{(x)}^{(z)} \end{pmatrix},$$

der virtuelle Schnittgrößenvektor des Lastfalles  $\bar{\Phi}_{(x)}$  gemäß

$$\bar{S}_{(x)} = \begin{pmatrix} \bar{N}_{(x)}^{(x)} \\ \bar{V}_{(x)}^{(y)} \\ \bar{V}_{(x)}^{(z)} \\ \bar{M}_{(x)}^{(T)} \\ \bar{M}_{(x)}^{(y)} \\ \bar{M}_{(x)}^{(z)} \end{pmatrix}$$

und  $Z(x)$  der Verzerrungsvektor

$$Z_{(x)} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{(x)} \\ \gamma_{(x)}^{(y)} \\ \gamma_{(x)}^{(x)} \\ \vartheta'_{(x)} \\ \kappa_{(x)}^{(y)} \\ \kappa_{(x)}^{(z)} \end{pmatrix}$$

aufgrund der realen Belastung, dann liest sich Formel 6.36) als

$$\int_x (\bar{\Phi}_{(x)} \delta_{(x)}) dx + \int_x (\bar{S}_{(x)} Z_{(x)}) dx = 0, \quad (6.37)$$

was man da die Vorzeichendefinition beliebig ist, als

$$\int_x (\bar{\Phi}_{(x)} \delta_{(x)}) dx = \int_x (\bar{S}_{(x)} Z_{(x)}) dx \quad (6.38)$$

schreiben kann. Da nun auch der virtuelle Lastfall beliebig wählbar ist, wird zur Handlichkeit  $\bar{\Phi}_{(x)}$  als Einzellast

$$\bar{Q}_k = \begin{pmatrix} \bar{F}_{x,k} \\ \bar{F}_{y,k} \\ \bar{F}_{z,k} \\ \bar{M}_{T,k} \\ \bar{M}_{y,k} \\ \bar{M}_{z,k} \end{pmatrix}$$

angenommen, welche am Punkt  $x_k$  einwirkt, an welchem die Verformung

$$\delta_{x_k} = \begin{pmatrix} u_{x_k} \\ v_{x_k} \\ w_{x_k} \\ \vartheta_{T,x_k} \\ \varphi_{y,x_k} \\ \varphi_{z,x_k} \end{pmatrix}$$

einwirkt. Formel 6.38 ergibt sich dann als

$$\bar{Q}_k \delta_{x_k} = \int_x (\bar{S}_{(x)} Z_{(x)}) dx. \quad (6.39)$$

Doch selbst das kann noch vereinfacht werden indem man die Einzellast  $\bar{Q}_k$  einfach als „1“<sup>5</sup> annehmen. Dadurch entfällt die Einzellast und wir erhalten eine Formel für die totale Verformung an einem Punkt:

$$\delta_{x_k} = \int_x (\bar{S}_{(x)} Z_{(x)}) dx \quad (6.40)$$

Aus Abschnitt 5.4 ist folgende Formel bekannt:

$$Z(x) = \underline{M}(x) S(x) \quad (6.41)$$

Das setzen wir in Formel 6.40 ein erhalten die Endformel, welche uns die Berechnung der totalen Verformung ermöglicht:

$$\delta_{x_k} = \int_x (\bar{S}_{(x)} \underline{M}(x) S(x)) dx \quad (6.42)$$

Bedeutend ist, dass über die gesamte Stablänge  $x$  integriert wird. Formel 6.42 gilt nur für die Verschiebungsarbeit eines ganzen Tragwerkes. Besteht ein Tragwerk aus mehr als nur einen Stab, so muss über alle Stäbe summiert werden.

$$\delta_{x_k} = \sum_n \int_x (\bar{S}_{(x)}^{(n)} \underline{M}_{(x)}^{(n)} S_{(x)}^{(n)}) dx \quad (6.43)$$

Hierbei nummeriert der Laufindex  $n$  alle Stäbe durch. Weiters sei erwähnt, dass die durch die Integration entstehende Konstante immer gleich 0 ist, da davon ausgegangen wird, dass der unbelastete Stab unverformt ist und daher an ihm noch keine Arbeit verrichtet wurde.

Im Hinblick auf Fachwerke, sei noch der Fall konstanter Schnittgröße über die Stablänge diskutiert. Der Einfachheit halber gehen wir auch von einer konstanten

<sup>5</sup>Es sei herausgestellt, dass die Last tatsächlich „1“ groß ist und nicht „1N“ oder Äquivalentes. Die virtuelle Last soll bewusst einheitenlos sein, damit die Verformung isoliert werden kann.

Steifigkeitsmatrix aus. Die Herleitung einer Formel für den Fall in dem diese variiert sei dem Leser überlassen. Eine konstante Funktion integriert ergibt den Wert der Funktion, weshalb Formel 6.43 integriert

$$\delta_{x_k} = \sum_n \bar{S}^{(n)} \underline{M}^{(n)} S^{(n)} \quad (6.44)$$

ergibt. Allgemein würde das für den Fall einer Schnittgrößenbelastung aller Schnittgrößen funktionieren, jedoch ist nachvollziehbar, dass es keine Querkraftbelastung geben darf, da eine konstante Querkraftbelastung zu einer inkonstanten Biegemomentenbelastung führt. Biegemomente können jedoch ebenfalls vernachlässigt werden, da sie (im Vergleich zur Normalkraftbelastung) äußerst gering sind<sup>6</sup>. Für Fachwerke ergibt sich also

$$\delta_{x_k} = \sum_n \left( \bar{N}_{x,n} \frac{N_{x,n}}{E_n A_n} + \bar{M}_{T,n} \frac{M_{T,n}}{G_n I_{T,n}} \right) \quad (6.45)$$

was, wenn man auch Torsionsmomente vernachlässigt, zu

$$\delta_{x_k} = \sum_n \bar{N}_{x,n} \frac{N_{x,n}}{E_n A_n} \quad (6.46)$$

wird. Obwohl der Punkt  $x_k$  beliebig gewählt werden könnte, ist es sinnvoll ihn an einem Knoten zu lokalisieren, da nur dann die Annahmen von fehlender Querkraft und Biegemoment wirklich realitätsnah sind.

---

<sup>6</sup>Der Sinn eines Fachwerkes ist die Ummünzung von Biegemomenten in Normalkräfte. Die Biegemomente (und Querkräfte) welche entlang von Stäben einwirken, werden deswegen vernachlässigt und in äquivalente Einzellasten an Fachwerksknoten umgewandelt.

# Kapitel 7

## Spannungstheorie

Innerhalb eines Körpers muss Gleichgewicht herrschen: Man kann das eindeutig sagen, da keine Translationen und auch keine Rotationen vorkommen. Einzelne Teile eines Körpers sind durch Flächen miteinander verbunden. Damit Gleichgewicht zwischen den einzelnen Teilen des Körpers herrschen kann, muss eine Interaktion stattfinden. Dies geschieht über deren Verbindungen, die Flächen. Daraus resultierend ergeben sich die sog. **Spannungen**. Diese Spannungen sind, wie die äußeren Kräfte die grundlegenden Elemente einer statischen Überlegung sind, die grundlegenden Elemente einer, die Festigkeitslehre betreffenden Überlegung. Nach dem die Festigkeitslehre ein Gebiet der Dynamik ist, soll die Spannungstheorie hier den statischen Teil dieser Überlegungen bilden, während das Kapitel 8 den kinetischen Teil bildet.

Die Idee der Spannung  $t$  wird genutzt, um eine Kraftübertragung  $\Delta F$  auf eine Fläche  $\Delta A$  beziehen zu können. Sie ist definiert als

$$t = \frac{\Delta F}{\Delta A} . \quad (7.1)$$

Allgemein kann man sich nicht sicher sein, dass sich die Kräfte über die Abmessungen der Fläche nicht ändern. Sie sind daher nur als Durchschnittswerte anzusehen. Eine allgemeine Spannung wird hier als  $t$  bezeichnet. Die Spannung ist, wie auch die Kraft, ein Vektor und wird daher ebenfalls durch eine Richtung und einen Betrag definiert.

Die Einheit lautet

$$[t] = \frac{[\Delta F]}{[\Delta A]} = \frac{N}{m^2} . \quad (7.2)$$

Aufgrund des Winkels der Wirklinie der Kräfte zu der Fläche, ergeben sich die folgenden beiden Arten von Spannungen:

## 7.1 Orthogonalspannungen $\sigma$

Steht die Wirklinie der Kraft orthogonal, d.h. im rechten Winkel auf die Fläche, so ergeben sich sog. **Normalspannungen**<sup>2</sup>. Diese werden konventionell durch ein  $\sigma$  bezeichnet (siehe Abb. 7.1). Die Normalspannung  $\sigma$  ergibt sich somit aus der Division der normal wirkenden Kraft  $F_{norm}$  auf die Fläche  $A$  zu

<sup>2</sup>auch Orthogonalspannung

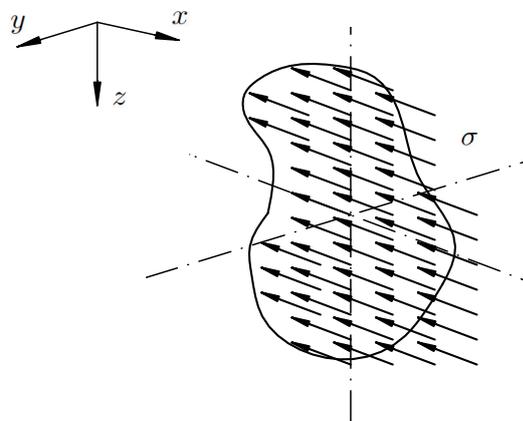


Abbildung 7.1: Normalspannungen

$$\sigma = \frac{\Delta F_{norm}}{\Delta A} \quad (7.3)$$

<sup>1</sup>Eleganter lässt sich diese Definition in Komponentenschreibweise darstellen. Mittels eines differentialen Zusammenhangs schreibt man

$$\sigma_i = \frac{\Delta F_i}{\Delta A_i} , \quad (7.4)$$

wobei  $F_i$  die Kraftkomponente in der Richtung  $i$  und  $A_i$  die Flächenkomponente in Richtung  $i$  ist.

<sup>1</sup>In weiterer Folge ergibt sich die Relation zwischen der Wirklinie der Kraft und der Fläche aus dem Kontext. Daher entfällt der Index „norm“ für „normal“

## 7.2 Tangentialspannungen $\tau$

Steht die Wirklinie der Kraft tangential zur Fläche, d.h. in dessen Ebene, so ergeben sich sog. **Schubspannungen**<sup>a</sup>. Diese werden konventionell durch ein  $\tau$  bezeichnet. Die Tangentialspannung  $\tau$  ergibt sich somit aus der Division der tangential wirkenden Kraft  $F_{tang}$  durch die Fläche  $A$  zu

<sup>a</sup>Auch Tangentialspannungen

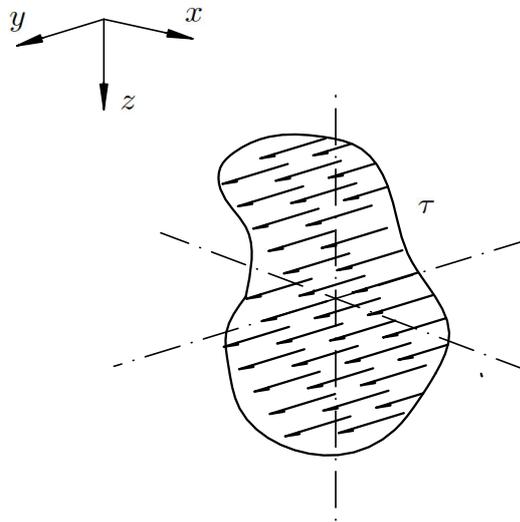


Abbildung 7.2: Schubspannungen

$$\tau = \frac{\Delta F_{tang}}{\Delta A} . \quad (7.5)$$

<sup>2</sup>Schubspannungen werden oft, wie in Abb. 7.2 mit einem Halbpfeil dargestellt. Das soll andeuten, dass sich der Vektor direkt auf der Oberfläche der Ebene befindet und daher ein Teil der Pfeilspitze durch die Oberfläche verdeckt wird. Man schreibt auch

$$\tau_{ij} = \frac{\Delta F_i}{\Delta A_j} , \quad (7.6)$$

wobei  $\vec{F}_i$  die Kraftkomponente in der Richtung  $i$  und  $\vec{A}_j$  der Flächenvektor in Richtung  $j$ , welche normal auf die Richtung  $i$  steht, ist. Diese Komponentenschreibweise ist für das Verständnis hier nicht unbedingt notwendig. Für komplexe Probleme sind solche Definitionen allerdings sehr hilfreich. Ein Beispiel dafür sind die Deformationen am Parallelepiped im Abschnitt 9.1.2.

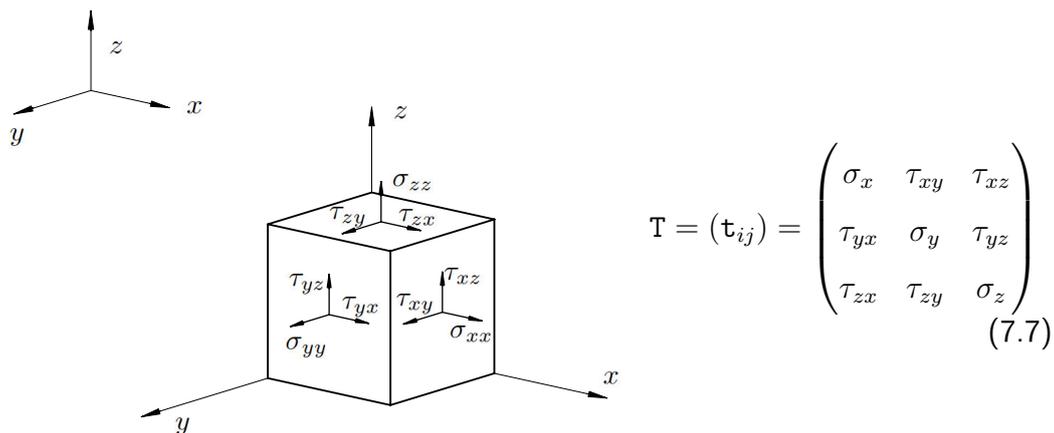
<sup>2</sup>In weiterer Folge ergibt sich die Relation zwischen der Wirklinie der Kraft und der Fläche aus dem Kontext. Daher entfällt der Index „tang“ für „tangential“

### 7.3 Indizes der Spannungen

Die mit einem  $\sigma$  bezeichneten Normalspannungen werden mit dem Index der Koordinatenachse versehen, zu welcher der Vektor der Spannung parallel verläuft.

Die mit einem  $\tau$  bezeichnete Schubspannung wird üblicherweise mit zwei Indizes versehen. Der erste bezeichnet die Achse, auf welche die Fläche, auf welche die Schubspannung wirkt, normal steht. Der zweite bezeichnet die Richtung des Vektors der Spannung.

Eigentlich werden Normalspannungen in der gleichen Weise wie die Schubspannungen bezeichnet. Da sie aber per Definition in Richtung der Achse wirkt, zu welcher die Fläche normal steht, entfällt der zweite Index üblicherweise.



(8.13) stellt den Spannungstensor  $T$  von Cauchy (siehe Abschnitt ??) in Index- bzw. Matrixnotation für die Achsen  $(xyz)$  dar.

# Kapitel 8

## Deformationstheorie

Die Deformationstheorie befasst sich mit den Bewegungen, spezieller mit den Formänderungen von Körpern. Sie bildet daher den kinematischen Teil, welcher zusammen mit den Kapiteln 7 und 10 die Festigkeitslehre bildet. Man wird sich zunächst mit der räumlichen Verschiebung eines Körpers befassen, bevor man dann daraus die Dehnung und die Verzerrung - also die eigentliche Deformation ableitet. Für Vektoren, welche Distanzen und Orte beschreiben, wird eine dicke mathematische Schriftart verwendet.

### 8.1 Verschiebung

Eine Verschiebung ist die Änderung der räumlichen Lage eines Punktes. Mittels der Vektorrechnung versteht man unter einer Verschiebung des Punktes  $p$  von der Position 1 in die Position 2

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_1 + \mathbf{a} \quad . \quad (8.1)$$

<sup>1</sup> Dabei gibt der Vektor  $\mathbf{X}_2$  bzw.  $\mathbf{X}_1$  den Ortsvektor der Position 2 bzw. 1 und der Vektor  $\mathbf{a}$  den Verschiebungsvektor (siehe Abb. 8.1) an.

In Komponentenschreibweise folgt

---

<sup>1</sup>Es ist üblich den Vektor der Verschiebung als  $\mathbf{u}$  zu bezeichnen. Das führt allerdings zu Problemen, da auch die Verschiebungskomponente in Richtung der  $x$ -Achse als  $u$  bezeichnet wird.

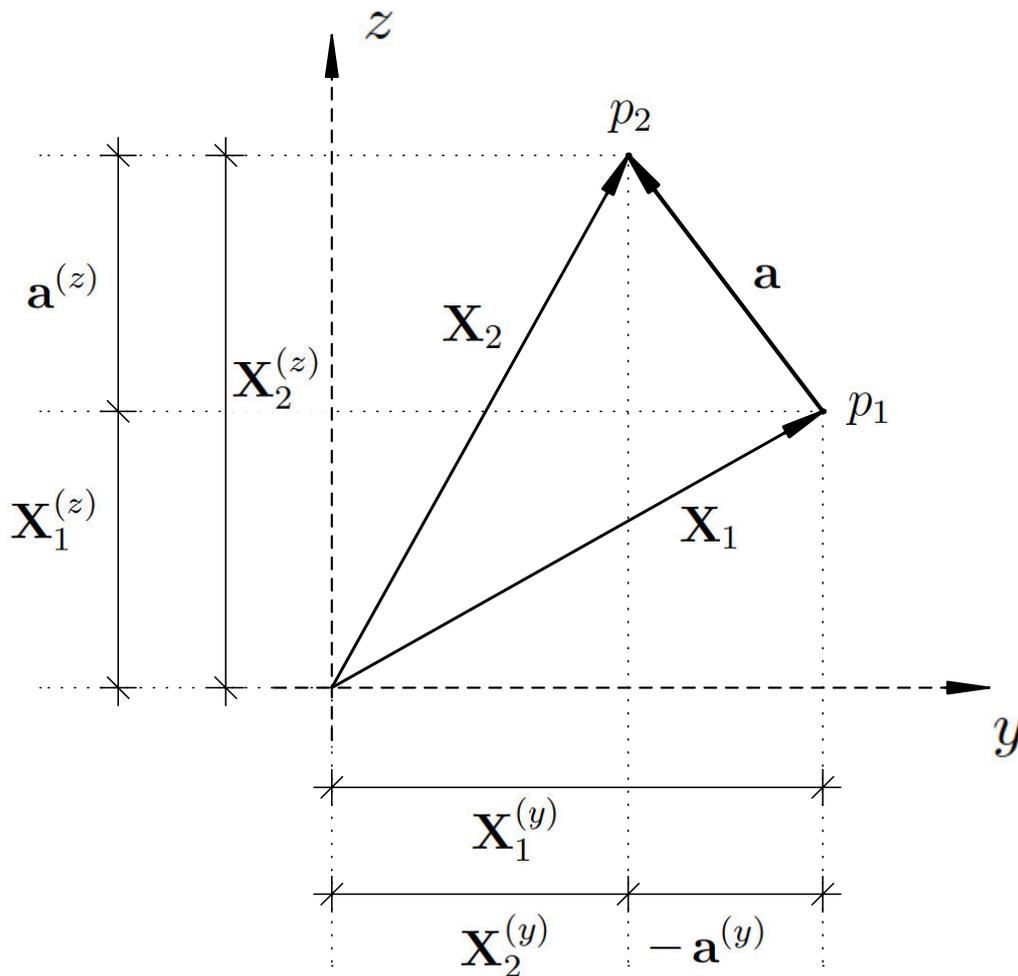


Abbildung 8.1: Verschiebungsvektor  $\mathbf{a}$

$$\boxed{\mathbf{X}_2^{(i)} = \mathbf{X}_1^{(i)} + \mathbf{a}^{(i)}} \quad (8.2)$$

Im dreidimensionalen, orthonormierten Koordinatensystem erweist es sich als sinnvoll, die Koordinatenachsen mit  $x$ ,  $y$  und  $z$  zu bezeichnen. Analog dazu bezeichnet man die Komponenten der Verschiebung in Richtung der Achsen als

$$\mathbf{a}^{(x)} = u , \quad (8.3)$$

$$\mathbf{a}^{(y)} = v , \quad (8.4)$$

$$\mathbf{a}^{(z)} = w . \quad (8.5)$$

Der Distanzvektor  $\mathbf{s}$  ist ebenfalls als die Differenz zwischen zwei Ortsvektoren  $\mathbf{X}_2$  und  $\mathbf{X}_1$  definiert. Während der Verschiebungsvektor jedoch eine Änderung der Position impliziert, beschreibt ein Distanzvektor lediglich die Differenz zwischen den beiden Positionen.

$$\boxed{\mathbf{s}^{(i)} = \mathbf{X}_2^{(i)} - \mathbf{X}_1^{(i)}} . \quad (8.6)$$

Oft werden die Begriffe als Synonyme verwendet, da ihre Definitionen gleich formuliert sind und auch üblicherweise aus dem Kontext hervorgehen. Im Weiteren wird dennoch zwischen den beiden Begriffen, wie gerade erläutert, unterschieden.

## 8.2 Dehnung $\varepsilon$

Unter einer Dehnung  $\varepsilon$  versteht man eine relative Verschiebung zweier Punkte  $p_1$  und  $p_2$  in jener Richtung, in welche die Verbindung zwischen ihnen zeigt. Man betrachte zwei Punkte  $p_1$  und  $p_2$  im Abstand  $s^{(i)}$  (siehe Abb. 8.2) - also  $s^{(i)} = \mathbf{X}_2^{(i)} - \mathbf{X}_1^{(i)}$ , wenn  $\mathbf{X}_2^{(i)}$  bzw.  $\mathbf{X}_1^{(i)}$  die zu den Punkten  $p_2$  und  $p_1$  zugeordneten (Komponenten der) Positionen sind. Man verschiebt nun einen Punkt um  $\mathbf{a}^{(i)}$  in Richtung der Verbindung der Punkte (die Verbindung  $s^{(i)}$  und die Verschiebung  $\mathbf{a}^{(i)}$  sind also parallel).

**Notiz** (Richtung der Verbindung). *Die Definition wirkt vielleicht ein wenig umständlich und wenig intuitiv. Sie wird spätestens bei der Verallgemeinerung, den Deformationen, Sinn machen. In Komponentenschreibweise lässt sich für die Bedingung, dass  $\mathbf{s}$  und  $\mathbf{a}$  parallel sein müssen schreiben:*

$$\frac{\mathbf{s}^{(i)}}{\mathbf{a}^{(i)}} \sim const \quad (8.7)$$

Die Dehnung bezeichnet nun die auf den Abstand  $s^{(i)}$  zwischen den Punkten bezogene, relative Verschiebung. In Komponentenschreibweise lautet diese Definition

$$\widetilde{\varepsilon}^{(i)} = \frac{\mathbf{a}^{(i)}}{\mathbf{X}_2^{(i)} - \mathbf{X}_1^{(i)}} = \frac{\mathbf{a}^{(i)}}{s^{(i)}} . \quad (8.8)$$

$\mathbf{a}^{(i)}$  kann hier natürlich auch die Summe mehrerer Verschiebungen sein.

$\widetilde{\varepsilon}^{(i)}$  beschreibt natürlich nur einen Durchschnittswert aller Dehnungen, welche zwischen den Punkten  $p_1$  und  $p_2$  vorkommen und kollektiv die Verschiebung  $\mathbf{a}^{(i)}$  erzeugen. Um eine Dehnung in einem dieser Punkte zu beschreiben (welche keinen Durchschnittswert angibt) bildet man den Limes, für welchen der Abstand  $s^{(i)}$  gegen 0 geht.

$$\lim_{s^{(i)} \rightarrow 0} \widetilde{\varepsilon}^{(i)} = \frac{\mathbf{a}^{(i)}}{s^{(i)}} = \varepsilon^{(i)} = \frac{\partial \mathbf{a}^{(i)}}{\partial s^{(i)}} . \quad (8.9)$$

Ein sehr anschauliches Beispiel bildet der Dehnungsversuch eines Stahlstabes im Abschnitt 10.1.

### 8.3 Verzerrung $\gamma$

Unter einer Verzerrung  $\gamma$  versteht man die Wirkung von parallelen Verschiebungen. Ähnlich Kräften, welche ein Drehmoment erzeugen, erzeugen Verschiebungen, welche gleich groß, entgegengesetzt gerichtet und von einander durch einen Abstand getrennt sind, eine Verzerrung.

**Notiz** (Verzerrung - Gleitung). *Man wird hier zuerst die Gleitung  $\epsilon$  und danach erst im Abschnitt 9.1.2 die Verzerrung  $\gamma$  einführen. Der Grund dafür ist, dass die Gleitung  $\epsilon$  die Analogie zu den Dehnungen bildet, während sie aber eigentlich gar nicht auftritt. Man zieht dafür die Verzerrung  $\gamma$  heran, deren Definition im Abschnitt 9.1.2 erläutert wird.*

Die Gleitung ist lt. Abb. ?? definiert zu

$$\tan \widetilde{\epsilon}^{(ij)} = \frac{\mathbf{a}_2^{(i)} - \mathbf{a}_1^{(i)}}{s^{(j)}} . \quad (8.10)$$

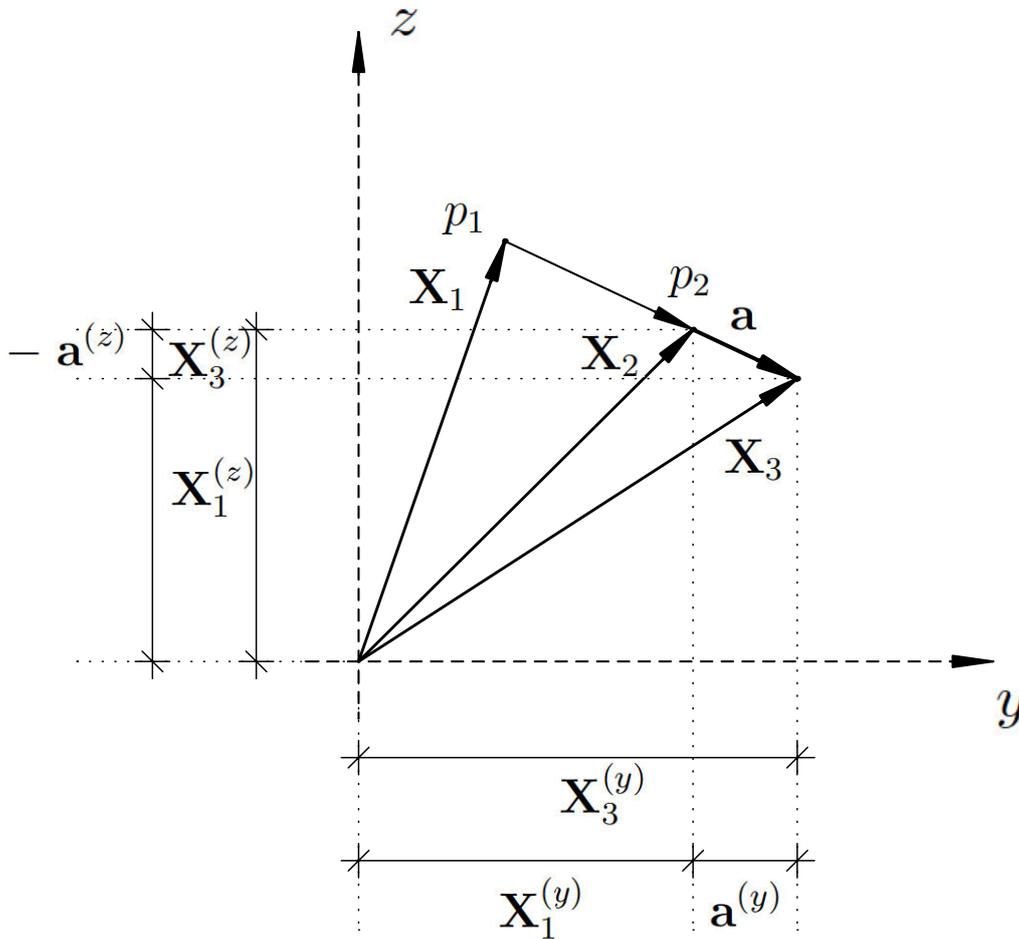


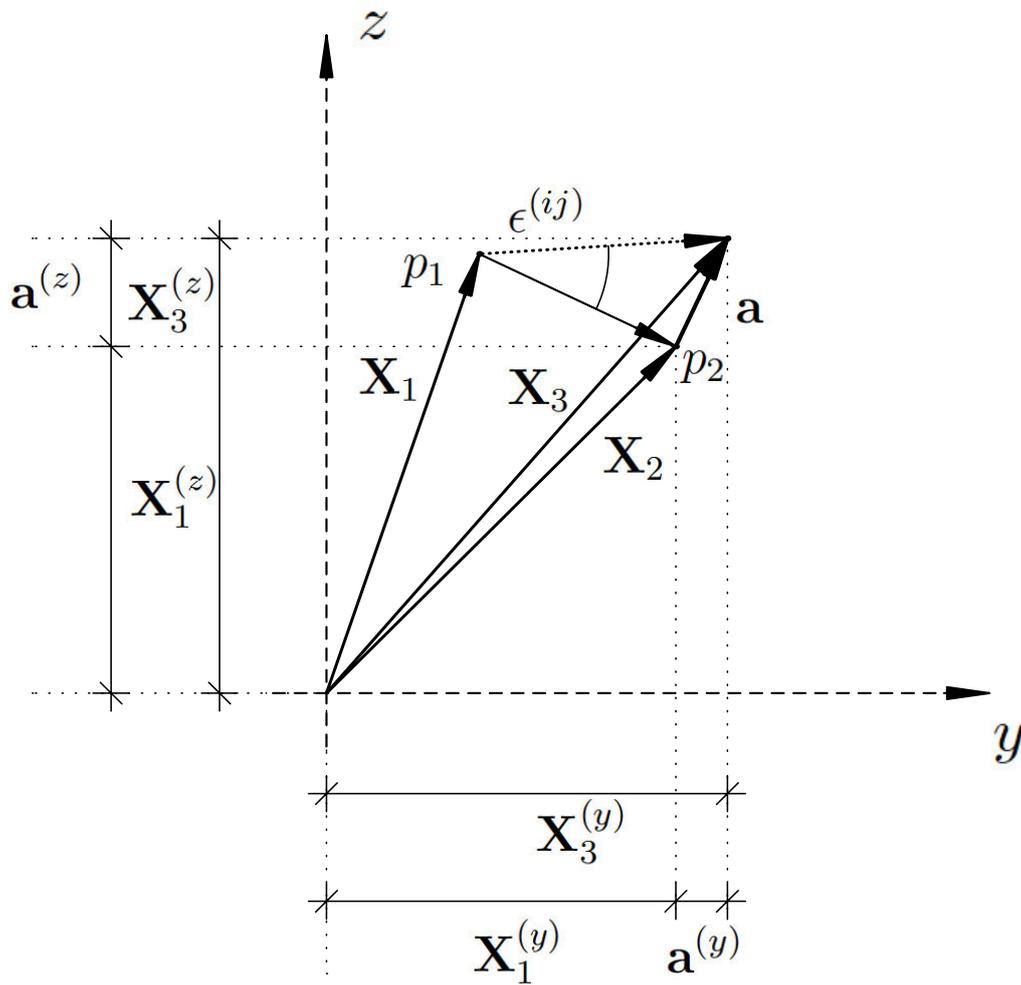
Abbildung 8.2: Dehnung  $\varepsilon^{(i)}$

Betrachtet man kleine Gleitungen, wie es in der Theorie der linearen Elastizität der Fall ist, so kann die Linearisierung aus 10.7 verwendet werden. Es folgt

$$\tan(\epsilon^{(ij)}) = \epsilon^{(ij)} \quad . \quad (8.11)$$

Die Richtung  $j$  steht dabei normal auf die Richtung  $i$ . Die Verzerrung beschreibt den Winkel zwischen den beiden Richtungen, es ist daher nur sinnvoll, dass die Richtung der Verzerrung normal auf die von  $i$  und  $j$  aufgespannte Ebene steht. Also  $\epsilon^{(ij)} = \epsilon^{(k)}$

Analog zu (8.9) ist es sinnvoll in einem differentialen Zusammenhang zu schreiben



Gleitung  $\epsilon^{(ij)}$

$$\epsilon_{ij} = \lim_{s_i \rightarrow 0} \frac{\mathbf{a}_2^{(i)} - \mathbf{a}_1^{(i)}}{\mathbf{s}^{(j)}} = \frac{\partial \mathbf{a}^{(i)}}{\partial \mathbf{s}^{(j)}} \quad (8.12)$$

Eine Gleitung bezeichnet also einen Winkel, welcher durch die Verschiebungen erzeugt wird. Während die Spannungen in einer so abstrakten Definition durchaus Sinn machen, ist die Vorstellung von Deformationen doch sehr schwer. Man verweist daher auf den Abschnitt 9.1.2, in welchem die gerade gemachten Definitionen auf einen Körper angewendet werden.

## 8.4 Indizes der Deformationen

Die Indizes der Deformationen ergeben sich so wie die der Spannungen. Sehr anschaulich ist die Indexführung am Beispiel des Deformationstensors  $D$  von Cauchy (siehe Abschnitt ??) zu zeigen. Er bildet das Analog zum Spannungstensor, welcher auch schon im Abschnitt 9.1.1 zur Veranschaulichung der Indizes genutzt wurde. Die Abbildung bedient sich des im Abschnitt 9.1.2 vorgestellten Modells des stellvertretenden Parallelepipeds  $\mathcal{C}$ .

$$D = (d_{ij}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \varepsilon_y & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \quad (8.13)$$

**Notiz** (Bezeichnung von Dehnung und Gleitung). *Beide, die Dehnung  $\varepsilon$  und die Gleitung  $\epsilon$  sind hier durch den griechischen Buchstaben Epsilon gekennzeichnet. Um zu differenzieren spricht  $\epsilon$  als „Eps“ (oder „Varepsilon“) und  $\varepsilon$  als „Epsilon“.*

## Kapitel 9

# Lösung durch stellvertretende Körper

Um einen Körper eingehend auf sein, die Festigkeitslehre betreffendes Verhalten untersuchen zu können, müssen Aussagen über die einzelnen Punkte des Körpers gemacht werden können. Einen einzelnen Punkt zu beschreiben, welcher weder ein Volumen, eine Fläche, eine Richtung oder Orientierung oder sonst irgendein anderes Merkmal als seine Position aufweist, gestaltet sich denkbar schwierig. Ähnlich der Frage nach der Geschwindigkeit zu einem Zeitpunkt könnte man zweifeln, ob alleine das Konzept von Spannungen und Deformation, welche ja per Definition eine Fläche bzw. eine Figur voraussetzen, mit der Idee eines einzelnen Punktes vereinbar ist. Es soll sich zeigen, dass sich ebenso wie bei der Problemstellung der Geschwindigkeit in einem Zeitpunkt auch bei der der Zustandsgrößen in einem Punkt eine Lösung finden lässt. Im Folgenden soll man sich damit beschäftigen, eben so eine Lösung zu finden um sie danach in konkreten Aufgabenstellungen anwenden zu können.

## 9.1 Das stellvertretende Parallelepiped $\mathcal{E}$

Man stelle sich zu einem beliebigen Punkt  $p$ , welcher Teil eines Kontinuums ist, ein Parallelepiped  $\mathcal{E}$  zugewiesen vor. Dieses Parallelepiped habe die Abmessungen  $\Delta x_i$  und sei lt. Abb. 9.1 in Richtung der Achsen  $x_i$  ausgerichtet.

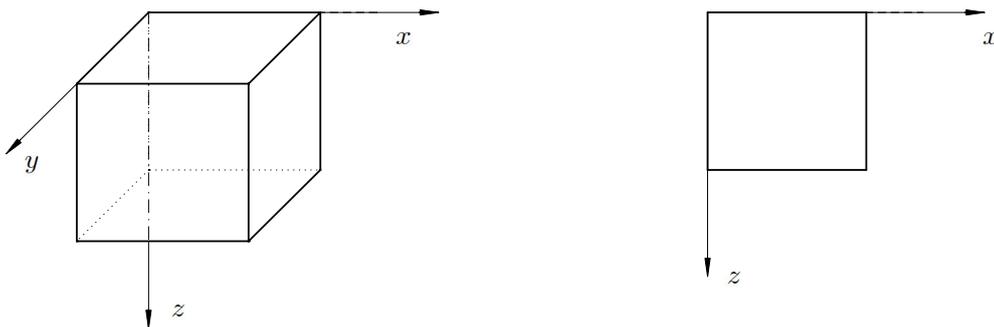


Abbildung 9.1: Parallelepiped für den Punkt  $p$

Für dieses Parallelepiped kann angenommen werden, dass sich Spannungen und Deformationen zu einem gewissen Maße  $\Delta$  von einem Randpunkt  $p_1$  über die dazwischen liegende Distanz  $\Delta x_i$  zu einem gegenüber liegenden Randpunkt  $p_2$  ändern. Man bezeichnet hier die Spannungen bzw. die Deformationen verallgemeinernd als  $\nu$ , da man für beide gleichermaßen argumentiert.

**Notiz** (Spannungen). *Diese Anordnung von Spannungen ist eher intuitiv, während die der Verformungen schon etwas schwerer zu akzeptieren ist. Im Abschnitt 9.1.2 soll explizit gezeigt werden, dass sich auch die Deformationen in analoger Weise zuweisen lassen.*

Einer jeden Ebene, welche normal auf die Richtung  $x_i$  steht, werden die folgenden Komponenten der Zustandsgrößen zugeordnet.

$$\nu_{ij} \tag{9.1}$$

**Notiz** (Anzahl der Dimensionen). *Man befindet sich im euklidischen Raum  $\mathbb{R}^3$ , daher gilt für  $\nu_{ij}$   $i = 1, 2, 3$  und  $j = 1, 2, 3$ . Würde man annehmen, dass  $i$  und  $j$  jeweils nur zwei Werte annehmen können, so würden diese zwei nicht den*

gesamten Raum aufspannen. Nimmt man hingegen mehr als drei Dimensionen an, so werden diese linear abhängig und daher jede Komponente über 3 obsolet (siehe Kapitel XXX).

und an der gegenüberliegenden Fläche daher

$$\nu_{ij} + \Delta\nu_{ij} , \quad (9.2)$$

wobei  $\Delta\nu_{ij}$  die Änderung der Funktion der Zustandsgröße über das Teilstück hinweg darstellt. Macht man die Abmessung des Parallelepipeds nun sehr klein, so werden die Werte der Spannungen, welche zunächst Durchschnittswerte der Spannungenangaben, zu den tatsächlichen Funktionswerten am Punkt  $p$ , welchem man das Parallelepiped zugeschrieben hatte, also zu  $\nu_{ij}$ . Man führt nun den Grenzübergang gegen 0 oder zumindest gegen einen so kleinen Wert durch, dass man sich sicher sein kann, dass sich die Zustandsgrößen über die Distanz hinweg nicht ändern

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta x_i = dx_i . \quad (9.3)$$

Da die Abmessungen  $\Delta x_i$  gegen 0 gehen, werden auch die Änderungen der Zustandsgrößen über die Abmessung gegen 0 gehen. Daher

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta\nu_{ij} = d\nu_{ij} . \quad (9.4)$$

Für einen Punkt gilt gleichermaßen wie für das gerade konstruierte Parallelepiped, dass  $\Delta x_i = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta x_i$ . Das Parallelepiped beschreibt daher, sofern man es unendlich klein macht, den Zustand in einem einzigen Punkt. Löst man Probleme für ein Parallelepiped und führt anschließend den Grenzübergang durch, so beschreibt jener Zustand des finiten (nach dem Grenzübergang infinitesimalen) Körpers auch jenen des Punktes.

Der Zustand dieses Punktes kann daher durch den Tensor zweiter Stufe  $\mathbb{N}$  mit den Komponenten

$$\mathbb{N} \quad \text{bzw.} \quad (\nu_{ij}) \quad (9.5)$$

beschrieben werden. Die Spannungen in einem Punkt - also den Spannungszu-

stand - bezeichnet man durch

$$T \quad \text{bzw.} \quad (\tau_{ij}) \quad (9.6)$$

und die Deformationen - also den Deformationszustand - durch

$$D \quad \text{bzw.} \quad (d_{ij}) \quad (9.7)$$

**Notiz** (Wahl der geometrischen Form eines Parallelepipeds). *Führt man den Grenzübergang gegen unendlich kleine Abmessungen durch, so verhält sich der Körper wie ein Punkt. Es ist unter diesen Bedingungen nicht mehr sinnvoll überhaupt von einer Form des Körpers zu sprechen, welcher unendlich kleine Abmessungen hat (eine Tatsache, welche sich bei der Einführung des Tetraederkörpers im Abschnitt 9.2 als essentiell erweisen wird). Man könnte sich nun fragen, wieso man denn ausgerechnet ein Parallelepiped untersucht; und das völlig zurecht. Es ließe sich jede Form verwenden um die Beschreibung des Punktes durchzuführen. Ein Parallelepiped weist aber zwei entscheidende Vorteile auf. Zunächst ist es eine sehr einfache geometrische Form, an welcher sehr leicht die Spannungen und Verformungen als Komponenten, welche auf den jeweiligen Oberflächen angreifen angesehen werden können. Der Einfluss auf eine solche Komponente  $\nu_{ij}$  rührt auch nur von der Ebene normal zur Richtung  $x_i$  her, während man bei einem Kugelkörper schon wesentlich komplexere Überlegungen anstellen müsste, um überhaupt eine sinnvolle Definition der Komponenten der Zustandsgrößen festlegen zu können. Der zweite wichtige Vorteil ist die Einfachheit der Vorstellung von Deformationen, da Dehnungen und Verzerrungen eine anschauliche geometrische Interpretation bilden, welche bei einem komplexeren Objekt wie einem anderen regelmäßigen Polytop schon sehr viel weniger vorstellbar sind.*

### 9.1.1 Spannungen am Parallelepiped - statische Bedingung

Man fordert für einen jeden Punkt im Kontinuum Gleichgewicht<sup>1</sup>. Die Bedingung lässt sich an einem Parallelepiped zeigen und nach anschließendem Grenzübergang auch für den einzelnen Punkt geltend machen. Aufgrund der Forderung

<sup>1</sup>Warum gerade diese Bedingung für die Festigkeitslehre so wichtig ist, wird im Kapitel des inneren Gleichgewichtes und der Schnittgrößen (Kapitel 11) näher erläutert

nach Gleichgewicht stellt das zu behandelnde Problem ein Kraftsystem der Kategorie I. (siehe Abschnitt 2.3) dar. Die Kräfte werden daher nach den Gleichungen (2.19) und (2.28) in den Kategorien II. und III. gelöst.

Die Forderung nach Gleichgewicht wird geschrieben als

$$\sum_{\alpha} F_{\alpha}^{(i)} = 0 \quad \sum_{\alpha} M_{\alpha}^{(k)} = 0 \quad . \quad (9.8)$$

Für die Behandlung des ersten Terms bildet man also das Gleichgewicht der Kräfte. Man multipliziert die Spannungen mit den durch die Abmessungen  $\Delta x_i$  aufgespannten Flächen

$$\Delta x_j \cdot \Delta x_k \cdot \sigma_{ij} - \Delta x_j \cdot \Delta x_k \cdot (\sigma_{ij} + \Delta \mathbf{t}_{ij}) = 0 \quad (9.9)$$

$$\Delta x_j \cdot \Delta x_k \cdot \Delta \mathbf{t}_{ij} = 0 \quad . \quad (9.10)$$

Man dividiert nun durch  $\Delta x_i \cdot \Delta x_k \cdot \Delta x_j$  und erhält daher

$$\frac{\Delta \mathbf{t}_{ij}}{\Delta x_i} = 0 \quad . \quad (9.11)$$

Durch bilden des Grenzwertes gegen 0 erhält man die Formeln, welche für den einzelnen Punkt anstatt für das finit große Parallelepipid gelten.

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{t}_{ij}}{\Delta x_i} = 0 \quad . \quad (9.12)$$

Für das Gleichgewicht an einem einzelnen Punkt eines Kontinuums gilt also als Bedingung

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{t}_{ij}}{\partial x_i} = \nabla_i \cdot \mathbf{t}_{ij} = 0} \quad . \quad (9.13)$$

In Langschrift in Richtung der Achsen  $x$ ,  $y$ , und  $z$  lautet die Gleichgewichtsbedingung

$$x\text{-Richtung} \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \quad (9.14)$$

$$y\text{-Richtung} \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0 \quad (9.15)$$

$$z\text{-Richtung} \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad (9.16)$$

Sie bilden zusammen mit den kinematischen Bedingungen (Abschnitt 9.1.2) und dem Hooke'schen Gesetz (Abschnitt 10.1) die drei grundlegenden Gleichungen der Festigkeitslehre.

### Satz von der Gleichheit der zugeordneten Schubspannungen

Eine weitere fundamentale Gleichung, den sog. **Satz von der Gleichheit der zugeordneten Schubspannungen**, erhält man wieder durch Bildung des Gleichgewichtes am Parallelepiped. Man bildet das Gleichgewicht der Momentenkomponenten in Richtung von  $k$ , welche durch den Mittelpunkt  $p$  gehen mittels den in Abb. 9.2 festgelegten Richtungen wie folgt

$$+ \tau_{ij} \cdot \Delta x_j \cdot \Delta x_k \cdot \frac{\Delta x_i}{2} \quad (9.17)$$

$$+ (\tau_{ij} + \Delta \tau_{ij}) \cdot \Delta x_j \cdot \Delta x_k \cdot \frac{\Delta x_i}{2} \quad (9.18)$$

$$- \tau_{ji} \cdot \Delta x_i \cdot \Delta x_k \cdot \frac{\Delta x_j}{2} \quad (9.19)$$

$$- (\tau_{ji} + \Delta \tau_{ji}) \cdot \Delta x_i \cdot \Delta x_k \cdot \frac{\Delta x_j}{2} \quad (9.20)$$

$$= 0 \quad (9.21)$$

Man schreibt hier den  $\varepsilon$ -Tensor nicht an, da er für alle Komponenten gleich ist und sich daher bei jeder Komponentengleichung eliminiert. Der letzte der Terme gibt dabei jeweils den Hebelsarm an, während die ersten beiden die Fläche darstellen, auf welche die Spannung wirkt. Nach der Gleichung (9.4) weiß man, dass die Anteile  $\Delta \tau_{ji}$  und  $\Delta \tau_{ji}$  gegen 0 gehen, falls man den Grenzübergang durchführt,

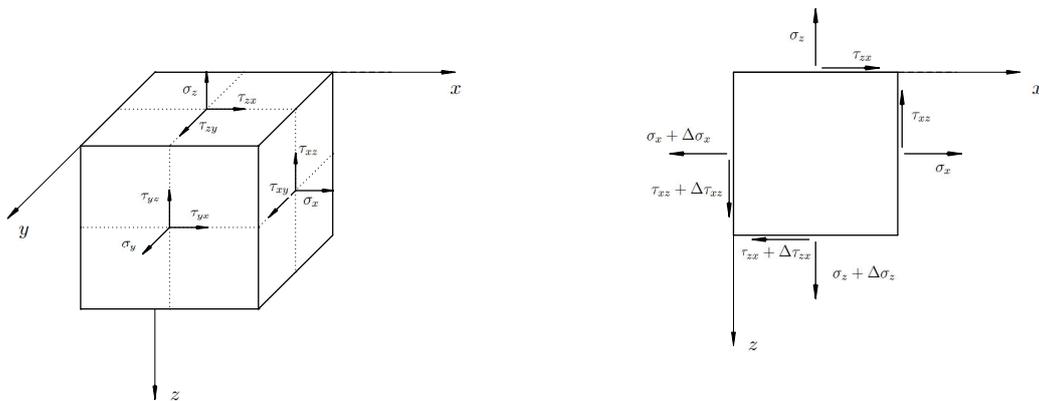


Abbildung 9.2: Spannungen am Parallelepiped

sich also auf einen Punkt bezieht. Man kann daher zusammenfassen zu

$$+ \tau_{ij} \cdot dx_j \cdot dx_k \cdot dx_i \tag{9.22}$$

$$- \tau_{ji} \cdot dx_i \cdot dx_k \cdot dx_j \tag{9.23}$$

$$= 0 \quad . \tag{9.24}$$

Nach streichen der Abmessungen des Parallelepipeds folgt

$$\boxed{\tau_{ij} = \tau_{ji}} \quad . \tag{9.25}$$

Der schon im Abschnitt 9.1.1 erwähnte, jedoch nicht bis zum Kapitel ?? tatsächlich behandelte Spannungstensor  $T$  ist daher symmetrisch.

**Notiz** (Herleitung in Langschrift). *Die Behandlung mittels Indexnotation (Komponentenschreibweise) kann anfangs etwas schwierig und/oder unintuitiv sein. Da man den Leser trotzdem auf das Rechnen mit Tensoren vorbereiten will, um zumindest eine Grundlage für komplexere Aufgabenstellungen zu geben, wird man dennoch auf Tensoren nicht verzichten. Die gerade präsentierten Inhalte sind dennoch so essentiell, dass sie im Folgenden zusätzlich in Langschrift und ohne der Zuhilfenahme von Tensoren oder Vektorkomponenten gelöst werden.*

Man bildet wie gehabt das Gleichgewicht der Momente (hier um einen Eckpunkt)

$$\sum M$$

$$\begin{aligned}
 & + \sigma_y \cdot dz \cdot dx \cdot \frac{dz}{2} \\
 & - \sigma_y \cdot dz \cdot dx \cdot \frac{dz}{2} \\
 & + \sigma_z \cdot dz \cdot dx \cdot \frac{dy}{2} \\
 & - \sigma_z \cdot dz \cdot dx \cdot \frac{dy}{2} \\
 & + \tau_{zy} \cdot dy \cdot dx \cdot dz \\
 & - \tau_{yz} \cdot dz \cdot dx \cdot dy \\
 & = 0
 \end{aligned} \tag{9.26}$$

$$\tau_{zy} \cdot dy \cdot dx \cdot dz = \tau_{yz} \cdot dz \cdot dx \cdot dy \tag{9.27}$$

$$\boxed{\tau_{zy} = \tau_{yz} = \tau} \tag{9.28}$$

$$\boxed{\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4 = \tau} \tag{9.29}$$

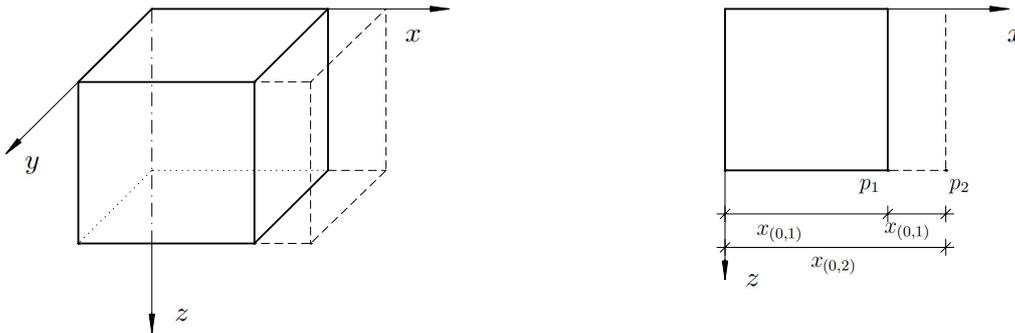
Es zeigt sich, dass alle 4 vorhandenen Schubspannungen gleich groß sind und paarweise zu gemeinsamen Ecken hin oder weg verlaufen. Es folgt der schon zuvor formulierte „Satz von der Gleichheit der zugeordneten Schubspannungen“.

### 9.1.2 Deformationen am Parallelepipid - kinematische Bedingung

Die Bedingungen der Deformationen am Parallelepipid sind eher anschaulicherer Natur. Sie entspringen nicht einer Forderung (etwa nach Gleichgewicht), sondern dienen der Definition der Deformationen. Außerdem soll dieser Abschnitt die konkrete Anwendung der im Kapitel 8 in eher abstrakter Weise vorgestellten

Deformationen zeigen. Man betrachte wieder das mit einem Punkt  $p$  assoziierte Parallelepiped  $\mathcal{E}$ . Abbildung 9.3 zeigt dessen Dehnung.

Abbildung 9.3: Dehnungen am Parallelepiped



Analog zum Abschnitt 8.2 stellt man auf

$$\varepsilon_i = \frac{\Delta \mathbf{a}_i}{\Delta x_i} = \frac{x_{(0,2)} - x_{(0,1)}}{x_{(0,1)}} . \quad (9.30)$$

$x_{(0,1)}$  und  $x_{(0,2)}$  sind hier die beiden Abstände zwischen dem Ursprung und den jeweiligen Punkten des ungedehnten und gedehnten Körpers respektive. Die Komponente des Verschiebungsvektors in Richtung  $i$  ist dabei die Differenz zwischen den beiden Punkten 1 und 2 und daher die Differenz der beiden Distanzen  $x_{(0,1)}$  und  $x_{(0,2)}$ . Die Abmessung des Körpers, auf welchen sich die Dehnung bezieht, ist  $x_{(0,1)}$ . Nimmt man nun wieder einen infinitesimal kleinen Körper an, führt man also den Grenzübergang durch, so erhält man für die Dehnung in einem Punkt eines Kontinuums

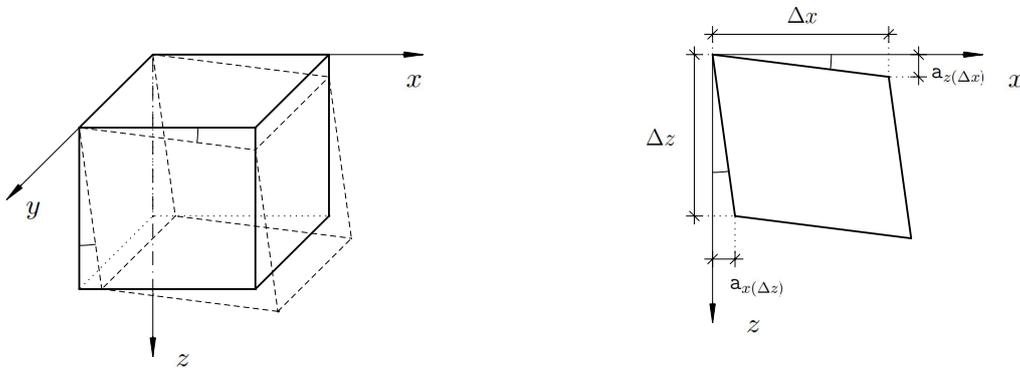
$$\boxed{\varepsilon_i = \frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial x_i}} . \quad (9.31)$$

Abbildung 9.4 zeigt die Verzerrungen am Parallelepiped. Es ist durch die angreifenden Deformationen nicht mehr rechtwinklig sondern allgemein.

Die Abmessung des nun verzerrten Parallelepipedes sind immer noch  $\Delta x_i$ , da man zu Anfang beschlossen hat, nur kleine Deformationen zu behandeln<sup>2</sup>. Die Kom-

<sup>2</sup>vgl. Kapitel 10 bzw. Abschnitt 10.7.

Abbildung 9.4: Verzerrungen am Parallelepiped



ponenten des Verschiebungsvektors  $\mathbf{a}_j$  in Richtung  $j$  verändern sich offensichtlich über den Körper  $\mathcal{E}$  hinweg. Man schreibt

$$\mathbf{a}_j(x_i) \quad . \quad (9.32)$$

wobei  $x_i$  einen vom Ursprung (also vom Punkt  $p$ ) gemessenen Abstand in Richtung  $i$  bezeichnet.

**Notiz** (Abhängigkeit der Verschiebungskomponenten). *Allgemein sind die Komponenten des Verschiebungsvektors natürlich von allen Dimensionen abhängig. Für den hier betrachteten Fall, in welchem reine Verzerrung vorliegt, ist die Komponente  $a_i$  über die Richtung  $i$  konstant. Der Übersichtlichkeit halber nimmt man außerdem an, dass die Verschiebung in Richtung  $k$  konstant (nämlich 0) ist.*

Die Verschiebung am Ende des Parallelepipedes beträgt daher

$$\mathbf{a}_i(\Delta x_j) \quad . \quad (9.33)$$

Der Winkel (die Gleitung)  $\epsilon_{ij}$ , welcher zwischen dem Rand des verzerrten Parallelepipedes und der Achse eingeschlossen wird, beträgt deshalb

$$\epsilon_{ij} = \tan \frac{\mathbf{a}_i(\Delta x_j)}{\Delta x_j} \quad . \quad (9.34)$$

Man beruft sich wieder auf die Annahme von kleinen Deformationen und argumentiert mittels den geometrischen Linearisierungen wie folgt

$$\epsilon_{ij} = \tan \frac{a_i(\Delta x_j)}{\Delta x_j} \approx \frac{a_i(\Delta x_j)}{\Delta x_j} . \quad (9.35)$$

Aus dieser Annahme folgt weiters, dass sich die Funktion der Verschiebungskomponenten  $a_i(\Delta x_j)$  über die Abmessung von  $\mathcal{E}$  nicht viel ändert. Man kann daher annehmen, dass es sich um eine lineare Funktion oder um zumindest eine solche handelt, welche ihr sehr nahe liegt. Man kann daher als Differential anschreiben

$$\epsilon_{ij} = \frac{\frac{\partial a_i}{\partial x_j} \cdot \Delta x_j}{\Delta x_j} = \frac{\partial a_i}{\partial x_j} . \quad (9.36)$$

Man führt nun (da er nichts ändert, nur der Vollständigkeit halber) den Grenzübergang durch und erhält für die Gleitung in einem Punkt  $p$

$$\epsilon_{ij} = \frac{\partial a_i}{\partial x_j} . \quad (9.37)$$

Man beachte die Indizes. Der andere, in dieser Deformation auftretende Winkel  $\epsilon_{ji}$  wird auf ganz gleiche Weise zu

$$\epsilon_{ji} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \quad (9.38)$$

bestimmt. Die Verzerrung, von welcher schon im Abschnitt 8.3 gesagt wurde, dass sie das eigentliche, aussagekräftige Maß ist, ergibt sich zu

$$\boxed{\gamma_{ij} = \epsilon_{ij} + \epsilon_{ji}} . \quad (9.39)$$

Man kann interpretieren, dass die beiden Indizes von  $\gamma$  jene Achsen angibt, in welchen verzerrt wird. Im Kapitel zur linearen Elastizität (Kapitel 10) wird man die beiden gerade behandelten Zustandsgrößen (die Spannungen und die Verformungen) in Verbindung setzen. Da lt. Abschnitt 9.1.1 gilt

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} , \quad (9.40)$$

folgt dann auch

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji} . \quad (9.41)$$

Auch der Deformationstensor ist somit symmetrisch. Gleichung (9.39) lässt sich daher als

$$\gamma_{ij} = 2 \cdot \epsilon_{ij} \quad (9.42)$$

verstehen.

Die Komponenten des Deformationstensors nach Cauchy, welcher erst im Kapitel ?? ausführlicher behandelt werden soll, hier daher nur als zweckmäßige Notation dient, schreibt man daher als

$$d_{ij} = \frac{\partial a_i}{\partial x_j} . \quad (9.43)$$

$\epsilon_{ii}$  und  $\epsilon_{ij}$  bilden die Einträge des Deformationstensors. Man schreibt wie folgt

$$d_{ij} = \begin{cases} \epsilon & \text{falls } i = j \\ \epsilon & \text{falls } i \neq j \end{cases} . \quad (9.44)$$

Sie bilden zusammen mit den statischen Bedingungen (Abschnitt 9.1.1) und dem Hooke'schen Gesetz (Abschnitt 10.1) die drei grundlegenden Gleichungen der Festigkeitslehre.

## 9.2 Der stellvertretende Tetraeder $\mathcal{T}$

Bezieht man Zustandsgrößen auf einen einzigen Punkt, so wird man dazu für einen Körper lösen und danach den Grenzübergang zu einem unendlich kleinen durchführen. Ist er aber unendlich klein, so kann man nicht mehr von der Form eines Körpers sprechen. Man kann sich deshalb nicht mehr auf die Annahme stützen, dass die Maximalwerte in diesem Punkt durch ein Parallelepiped repräsentiert werden können, da ja ein jeder Körper herangezogen werden kann. Um dieses Problem zu bewältigen, löst man für einen anderen Körper: den Tetraeder  $\mathcal{T}$ . Drei der vier Dreiecke, welche den Tetraeder ausmachen, liegen wieder in den durch die Achsen aufgespannten Ebenen und sind wie beim Parallelepiped mit jeweils drei Zustandsgrößen  $\nu_{ij}$  versehen. Auf der verbleibenden Ebene liegen jene Zustandsgrößen, welche sie ausgleichen, welche ihnen also entsprechen. Sie

bilden also die Resultierenden und damit tatsächlich jene repräsentativen Werte, welche in einem Punkt maximal bzw. minimal wirken können. Es lässt sich nun ein Winkel bestimmen unter welchem die Zustandsgrößen ihre Maxima bzw. Minima einnehmen. Sie sind auch jene Maxima und Minima, welche der Punkt erfährt.

### 9.2.1 Spannungen am Tetraederkörper

Man löst wie beim Parallelepiped für zweidimensional:

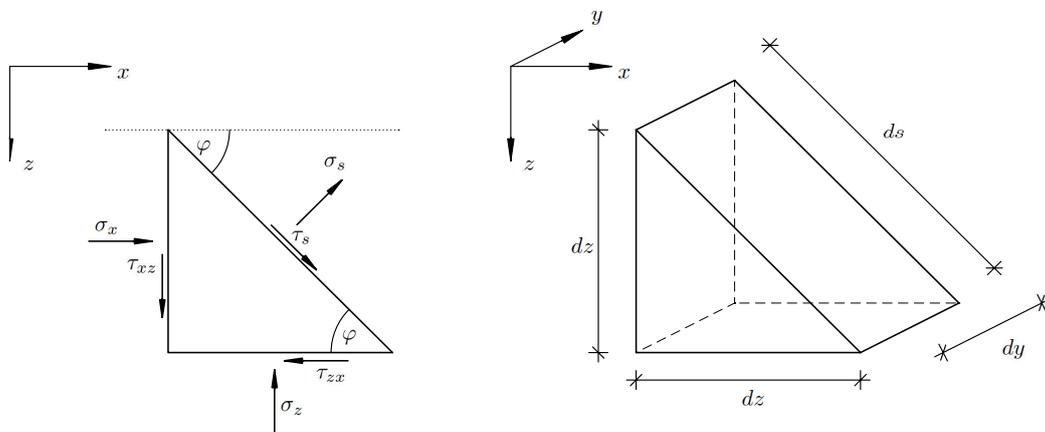


Abbildung 9.5: 2-achsiger Spannungszustand

Wenn die Abmessungen  $dy$ ,  $dz$  und  $ds$  gegen 0 gehen, befindet sich die schräge Schnittebene im Punkt  $A$ .

Zunächst werden die Bedingungen des Gleichgewichts der horizontal sowie vertikal wirkenden Kräfte aufgestellt.

$\sum^H$ 

$$\begin{aligned}
& + \sigma_y \cdot dz \cdot dx \\
& - \tau_{zy} \cdot dy \cdot dx \\
& + \tau_s \cdot \sin \varphi \cdot ds \cdot dx \\
& - \sigma_s \cdot \cos \varphi \cdot ds \cdot dx \\
& = 0
\end{aligned} \tag{9.45}$$

 $\sum^V$ 

$$\begin{aligned}
& + \sigma_z \cdot dy \cdot dx \\
& - \tau_{yz} \cdot dz \cdot dx \\
& + \tau_s \cdot \cos \varphi \cdot ds \cdot dx \\
& - \sigma_s \cdot \sin \varphi \cdot ds \cdot dx \\
& = 0
\end{aligned} \tag{9.46}$$

Durch Lösung des Gleichungssystems, Substitution der Winkelfunktionen, sowie bekannter Beziehungen ergeben sich die resultierenden Spannungen zu

$$\sigma_{s(\sigma_y, \sigma_z, \tau, \varphi)} = \sigma_y \cdot \cos^2 \varphi + \sigma_z \cdot \sin^2 \varphi + 2\tau \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \tag{9.47}$$

$$\tau_{s(\sigma_y, \sigma_z, \tau, \varphi)} = (\sigma_y - \sigma_x) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi + \tau \cdot (\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi) \tag{9.48}$$

Im Weiteren wird die Abhängigkeit der Funktion als klar vorausgesetzt und daher nicht mehr angeschrieben.

Um die Bildung der Ableitungen zu vereinfachen und generell quadrierte Winkelfunktionen zu vermeiden, werden weitere Ausdrücke substituiert (siehe Appendix)

und es folgen die Funktionen.

$$\sigma_s = \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} + \frac{\sigma_y - \sigma_z}{2} \cdot \cos 2\varphi + \tau \cdot \sin 2\varphi \quad (9.49)$$

$$\tau_s = \frac{\sigma_y - \sigma_z}{2} \cdot \sin 2\varphi - \tau \cdot \cos 2\varphi \quad (9.50)$$

### Bestimmung der Hauptspannungen

Als Hauptspannungen werden die Extremwerte der resultierenden Spannungen  $\sigma_s$  und  $\tau_s$  an einem Spannungszustand bezeichnet. Sie können einfach durch Anwendung der Differentialrechnung als Nullstelle der 1. Ableitung ermittelt werden.

### Hauptnormalspannungen

Es folgt die Bedingung der Normalspannung

$$\frac{d\sigma}{d\varphi} = 0 \quad (9.51)$$

$$\frac{d}{d\varphi} \left( \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} + \frac{\sigma_y - \sigma_z}{2} \cdot \cos 2\varphi + \tau \cdot \sin 2\varphi \right) = 0 \quad (9.52)$$

$$-\frac{\sigma_y - \sigma_z}{2} \cdot 2 \cdot \sin 2\varphi + \tau \cdot 2 \cdot \cos 2\varphi = -2\tau = 0 \quad (9.53)$$

Es zeigt sich, dass an jedem Punkt, in welchem die Normalspannungen ihre Extremwerte aufweisen, die resultierenden Schubspannungen 0 sind. Entgegen erster Intuition muss das für die Extremwerte der Schubspannungen nicht unbedingt gelten.

Durch Äquivalenzumformung ergibt sich für den Winkel, unter welchem die Extremwerte auftreten, die Formel

$$\boxed{\tan 2\varphi = \frac{2\tau}{\sigma_y - \sigma_z}} \quad (9.54)$$

Die Gleichung weist mehr als eine Lösung auf, da die Funktion des Tangens glei-

che Werte alle  $n\pi$  für  $\{n \in \mathbb{Z}\}^3$  annimmt.

Daraus folgt

$$\tan\left(2\left(\varphi \pm \frac{\pi}{2}\right)\right) = \tan(2\varphi \pm \pi) = \tan 2\varphi. \quad (9.55)$$

Die Hauptspannungen befinden sich daher an den Stellen (Winkeln)

$$\tan(2\varphi \pm n\pi) = \frac{2\tau}{\sigma_y - \sigma_z} \quad (9.56)$$

für  $\{n \in \mathbb{Z}\}$ . Sie treten also in rechten Winkeln zueinander auf d.h. in einem Spannungszustand treten 4 Extremwerte auf: 2 Hochpunkte sowie 2 Tiefpunkte.

Es wird nun der in den Funktionen für die Normalspannungen auftretenden Winkel  $\varphi$  durch die Winkel  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$ , unter welchem die Extremwerte tatsächlich auftreten, ersetzt

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_1 \\ \varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2} \end{cases}. \quad (9.57)$$

Die Hauptspannungen werden durch die Indizes 1 und 2 unterschieden.

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} + \frac{\sigma_y - \sigma_z}{2} \cdot \cos 2\varphi_1 + \tau \cdot \sin 2\varphi_1 \quad (9.58)$$

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} + \frac{\sigma_y - \sigma_z}{2} \cdot \cos 2\varphi_2 + \tau \cdot \sin 2\varphi_2 \\ &= \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} - \frac{\sigma_y - \sigma_z}{2} \cdot \cos 2\varphi_1 - \tau \cdot \sin 2\varphi_1 \end{aligned} \quad (9.59)$$

Alternativ lassen sich die Funktionen der Hauptnormalspannungen auch ohne Winkelfunktionen wie folgt anschreiben

<sup>3</sup>ev. klarer als ausgeschriebene Menge:  $\{n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

$$\boxed{\begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \left\} \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_y - \sigma_z)^2 + 4\tau^2}\right.} \quad (9.60)$$

Die Gleichung lässt sich auch als

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} \cdot \tau_1 \quad (9.61)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} \cdot \tau_2 \quad (9.62)$$

anschreiben, wobei  $\tau_1$  bzw.  $\tau_2$  die Hauptschubspannungen, welche gleich ermittelt werden, darstellt. Abhängig von Richtung und Betrag von  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ , und  $\tau$  ist  $\sigma_1$  bzw.  $\sigma_2$  das Maximum bzw. Minimum.

### Hauptschubspannungen

Die gleiche Vorgehensweise kann nun für die Hauptschubspannungen  $\tau_1$  und  $\tau_2$  durchgeführt werden

$$\frac{d\tau}{d\varphi} = 0 \quad (9.63)$$

$$\frac{d}{d\varphi} ((\sigma_y - \sigma_x) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi + \tau \cdot (\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi)) = 0 \quad (9.64)$$

$$\boxed{\tan 2\varphi = -\frac{\sigma_y - \sigma_z}{2\tau}} \quad (9.65)$$

Es ergibt sich erneut mittels Winkelfunktion und Substitution

$$\boxed{\begin{matrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{matrix} \left\} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_y - \sigma_z)^2 + 4\tau^2}\right.} \quad (9.66)$$

Durch subtrahieren von (9.62) von (9.61) erhält man

$$|\sigma_1 - \sigma_2| = \tau_1 - \tau_2 \quad , \quad (9.67)$$

mittels dem aus (9.74) gewonnenen  $\tau_1 = -\tau_2$

$$2 \cdot \tau = \pm |\sigma_1 - \sigma_2| \quad (9.68)$$

und daher

$$\boxed{\begin{array}{l} \tau_1 \\ \tau_2 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \tau_1 \\ \tau_2 \end{array}} \right\} \pm \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}} \quad (9.69)$$

$$\tau_1 = |\sigma_1 - \sigma_2| \quad . \quad (9.70)$$

Schubspannungen am 2-achsigen Spannungszustand weisen in ihren Hauptrichtungen gleiche Beträge auf.

Setzt man nun die Winkel der beiden Hauptspannungen (Normal- und Schubspannungen) in Relation, so erhält man:

$$\tan 2\varphi_{1,\sigma} \cdot \tan 2\varphi_{1,\tau} = -1 \quad . \quad (9.71)$$

Wobei  $\varphi_{1,\sigma}$  den Winkel der Hauptrichtung der Normalspannungen und  $\varphi_{1,\tau}$  den der Hauptschubspannungen angibt.

Es zeigt sich, dass sich die Hauptrichtungen der beiden Spannungen um  $\frac{\pi}{4}$  unterscheiden. Daraus folgt:

$$\varphi_{1,\sigma} = \varphi_{1,\tau} \pm n \frac{\pi}{4} \quad (9.72)$$

Ein Koordinatensystem, dessen Achsen den Hauptachsen<sup>4</sup> entspricht, bezeichnet man auch als sog. **Hauptachsensystem**. Es folgt die zuvor angesprochene wichtige Folgerung, dass Winkel, unter welchen Hauptschubspannungen auftreten, nicht zwingend normalspannungsfrei sind.

<sup>4</sup>also den Achsen, um welche die maximalen und minimalen Spannungen liegen

### 9.2.2 Deformationen am Tetraederkörper

Die Deformationen am Tetraederkörper lassen sich in genau der gleichen Weise aufstellen. Man erhält daher für die Hauptdehnungen:

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{array} \right\} \frac{\varepsilon_y + \varepsilon_z}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + 4\epsilon^2} \quad (9.73)$$

und für die Hauptgleitungen

$$\left. \begin{array}{l} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{array} \right\} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + 4\epsilon^2} \quad (9.74)$$

sowie

$$\epsilon_1 = |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \quad (9.75)$$

Der Winkel zwischen den Hauptdehnungen und den Hauptgleitungen lautet ebenfalls

$$\varphi_{1,\varepsilon} = \varphi_{1,\epsilon} \pm n \frac{\pi}{4} \quad (9.76)$$

### 9.2.3 Trajektorien

Man hat sich nun ausführlich damit beschäftigt, wie man einen Punkt eines Kontinuums bezüglich der vorkommenden Spannungen beschreiben kann. Bildet man einen Körper ab und zeichnet in einem jeden Punkt die Hauptspannungsrichtungen ein, so werden diese Kurvenscharen erzeugen, welche man die sog. **Hauptspannungstrajektorien**<sup>5</sup> nennt. Die Linien verbinden jeweils Punkte gleicher Hauptspannung.

Die dicker dargestellten Linien sind dabei jene, welche die Maximalwerte der Spannung - also  $\sigma_1$  - bzw. deren Richtungen verbindet, während die dünneren Linien jene darstellen, welche die Minimalwerte der Spannung - also  $\sigma_2$  - bzw. deren Richtungen verbindet. Die Hauptnormalspannungstrajektorien der Minimal-

<sup>5</sup>auch Hauptspannungslinien

und Maximalwerte durchdringen einander stets in einem Winkel von  $\frac{\pi}{2}$ , was lt. Abschnitt 9.2.1 jener Winkel ist, unter welchem die Maxima bzw. Minima der Normalspannungen auftreten.

Die Darstellung ist analog und wieder durchdringen die Trajektorien einander in einem Winkel von  $\frac{\pi}{2}$  (vgl. Abschnitt 9.2.1). Trägt man beide - also sowohl die Hauptnormal- sowie die Hauptschubspannungen - in einem Schaubild ein, so durchsetzen sie einander in einem Winkel von  $\frac{\pi}{4}$ , was ebenfalls schon am Ende des Abschnittes 9.2.1 gezeigt wurde.