

Tensorprodukte von Darstellungen endlicher Gruppen

G. Chiusole

In diesem Vortrag werden die Beispiele 19.15 [JL], 19.16 [JL], 19.17 [JL], welche die Charaktertafeln der S_4 , S_5 , und S_6 explizit berechnen **nicht** behandelt. Sie sind aber **sehr** zu empfehlen!

1 Tensor Produkte von Vektorräumen

Zunächst betrachten wir 3 äquivalente Definitionen des Tensorprodukt von Vektorräumen über einem allgemeinen Körper \mathbb{F} . Danach folgt die Verallgemeinerung auf $\mathbb{F}G$ -Moduln.

Definition 1. (Universelle Eigenschaft) Sei \mathbb{F} ein Körper und seien V, W Vektorräume über \mathbb{F} . Dann nennt man einen Vektorraum Z **Tensorprodukt von V und W** sofern

- (1) eine bilineare Abbildung $\phi : V \times W \rightarrow Z$ existiert und
- (2) für einen beliebigen \mathbb{F} -Vektorraum T gilt: $\forall t \in \text{BiLin}(V \times W, T) \exists! \psi \in \text{BiLin}(Z, T) : \psi \circ \phi = t$.

Also mit anderen Worten dass das folgende Diagramm existiert und kommutiert.

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\phi} & Z \\ & \searrow t & \downarrow \exists! \psi \\ & & T \end{array}$$

Durch diese Eigenschaft ist Z eindeutig bestimmt. Man spricht daher von **dem** Tensorprodukt von V und W und schreibt $V \otimes_{\mathbb{F}} W$. Wenn es klar ist, wird das Subskript \mathbb{F} unterdrückt.

Definition 2. (Faktorraum) Sei \mathbb{F} ein Körper und seien V, W Vektorräume über \mathbb{F} . Dann nennt man den Vektorraum $V \otimes W$ **das Tensorprodukt von V und W** definiert durch

$$V \otimes W := F(V \times W) / \sim \quad (1)$$

wobei

$$F(V \times W) := \left\{ \sum^{\text{endlich}} \lambda(v, w) \mid \lambda \in \mathbb{F}, v \in V, w \in W \right\} = \langle (v, w) \mid v \in V, w \in W \rangle \quad (2)$$

der freie Vektorraum über $V \times W$.

Die Äquivalenzrelation \sim ist wie folgt definiert: $\forall \lambda \in \mathbb{F}, (v, w) \in V \times W$:

$$\begin{aligned} (\lambda v, w) &\sim (v, \lambda w) \\ (v_1 + v_2, w) &\sim (v_1, w) + (v_2, w) \\ (v, w_1 + w_2) &\sim (v, w_1) + (v, w_2) \end{aligned}$$

$V \otimes W$ ist **kein** Unterraum und auch **kein** Quotientenraum von $V \times W$. Es ist der Quotientenraum des Vektorraums mit Basis den Elementen $(v, w) \in V \times W$ - des freien Vektorraums, erzeugt durch $V \times W$, also eines wesentlich größeren Vektorraums.

Definition 3. Sei \mathbb{F} ein Körper und seien V, W Vektorräume über \mathbb{F} mit Basen $\{v_1, \dots, v_n\}$ und $\{w_1, \dots, w_m\}$. Dann nennt man den Vektorraum $V \otimes W$ **das Tensorprodukt von V und W** definiert durch das lineare Erzeugnis der Elemente

$$V \otimes W := \{v_i \otimes w_j \mid i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}\} \quad (3)$$

Für $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \in V$ und $w = \sum_{j=1}^m \mu_j w_j \in W$ definiere $v \otimes w$ entsprechend als

$$v \otimes w = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \right) \otimes \left(\sum_{j=1}^m \mu_j w_j \right) := \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j (v_i \otimes w_j).^1 \quad (4)$$

¹Hieraus folgen die üblichen Linearitätsrelationen die man erwartet.

Remark 1. Elemente im Tensorprodukt, welche von der Form $v \otimes w$ für $v \in V$ und $w \in W$ sind nennt man **reine** Tensoren. Achtung! Nicht alle Elemente in $V \otimes W$ sind pure Tensoren. Beispiel: $v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2$. Beispielsweise hat das Kronecker-Produkt zweier Vektoren stets nicht vollen Rang. Aber es gibt dennoch Matrizen, welche vollen Rang haben. Wenn man $v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2$ als Element in $V^* \otimes V$ interpretiert, so ist die Aussage, dass die Identitätsmatrix kein Kronecker-Produkt aus zwei Vektoren sein kann.

Nun zur Definition für einen $\mathbb{C}G$ Modul.

Definition 4. Sei \mathbb{F} ein Körper, G eine endliche Gruppe und V, W zwei $\mathbb{F}G$ Moduln. Dann ist die induzierte Gruppenwirkung auf $V \otimes W$ definiert als

$$g.(v_i \otimes w_j) = g.v_i \otimes g.w_j \quad \forall g \in G, v_i \otimes w_j \in V \otimes W \quad (5)$$

wobei in $g.v_i \otimes g.w_j$ einmal die Gruppenwirkung bzgl. V und einmal bzgl. W gemeint ist.

Remark 2. Achtung! Für allgemeine Elemente $a \in \mathbb{F}[G]$ gilt nicht zwingend $a(v_i \otimes w_j)$. Beispiel: Für $a = \lambda g$ mit $\lambda \in \mathbb{F}$ und $g \in G$ gilt

$$(a.v_i \otimes a.w_j) = (\lambda g.v_i \otimes \lambda g.w_j) = \lambda^2(g.v_i \otimes g.w_j) \neq \lambda(g.v_i \otimes g.w_j) = \lambda g.(v_i \otimes w_j) = a.(v_i \otimes w_j) \quad (6)$$

Wir verwenden die gleiche Notation wie für das Tensorprodukt von Vektorräumen.

Example 1. Seien V, W zwei \mathbb{F} Vektorräume und V^* der Dualraum von V . Dann gilt

$$V^* \otimes W \simeq \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W), \quad v_i^* \otimes w_j \mapsto v_i^*(x)w_j \quad (7)$$

mit kanonischem Isomorphismus.

Proposition 1. Sei U, V, W drei \mathbb{F} Vektorräume. Dann existieren die folgenden kanonischen Isomorphismen

- $\mathbb{F} \otimes V \simeq V$

- $V \otimes W \simeq W \otimes V$
- $(U \otimes V) \otimes W = U \otimes (V \otimes W)$

2 Symmetrische und Anti-Symmetrische Dekomposition

Definition 5. Sei V ein \mathbb{F} Vektorraum mit $\text{Char}(\mathbb{F}) \neq 2$, $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis für diesen und $T : V \otimes V \rightarrow V \otimes V$ ein Endomorphismus definiert durch $T(v_i \otimes v_j) = v_j \otimes v_i$ und lineare Fortsetzung auf $V \otimes V$. Dann definiere

$$V \odot V = \text{Sym}(V \otimes V) := \{x \in V \otimes V \mid T(x) = x\} \quad (8)$$

$$V \wedge V = \text{AntSym}(V \otimes V) := \{x \in V \otimes V \mid T(x) = -x\} \quad (9)$$

als den **symmetrischen** und den **antisymmetrischen** Teil von $V \otimes V$. Den antisymmetrischen Teil eines Tensorproduktes nennt man auch das äußere Produkt².

Merke dass T selbstinvers ist. Also $T^2 = id$.³

Proposition 2. 1. $\text{Sym}(V \otimes V)$ und $\text{AntSym}(V \otimes V)$ sind Eigenräume bezüglich T und damit Untervektorräume von $V \otimes V$.

2. Weiters sind sie G -invariant und damit $\mathbb{F}G$ Untermoduln für eine endliche Gruppe G .

Proof. 1. $E_1(T) = \text{Sym}(V \otimes V)$ und $E_{-1}(T) = \text{AntSym}(V \otimes V)$

2. Sei $\sum_{i,j} \lambda_{ij}(v_i \otimes v_j) \in \text{Sym}(V \otimes V)$. Dann gilt $\forall g \in G$

²Andere Notationen existieren: [FH] schreiben $\text{Sym}^2(V)$ und $\wedge^2(V)$, [JL] schreiben $S(V \otimes V)$ und $A(V \otimes V)$.

³Für Körper mit Charakteristik 2 lassen sich ähnliche Konstruktionen durchführen, so wie sie hier vorgestellt wird braucht man aber einen Körper von Charakteristik ungleich 2

$$T(g \cdot (\sum_{i,j} \lambda_{ij}(v_i \otimes v_j))) = T(\sum_{i,j} \lambda_{ij} g \cdot (v_i \otimes v_j)) \quad (10)$$

$$= T(\sum_{i,j} \lambda_{ij}(g \cdot v_i \otimes g \cdot v_j)) \quad (11)$$

$$= \sum_{i,j} \lambda_{ij}(g \cdot v_j \otimes g \cdot v_i) \quad (12)$$

$$= \sum_{i,j} \lambda_{ij} g \cdot (v_j \otimes v_i) \quad (13)$$

$$= g \cdot (\sum_{i,j} \lambda_{ij}(v_j \otimes v_i)) \quad (14)$$

$$= g \cdot (\sum_{i,j} \lambda_{ij}(v_i \otimes v_j)) \quad (15)$$

Analog für antisymmetrisch.

□

Proposition 3. Sei V ein \mathbb{F} -Vektorraum. Dann gilt

$$\text{Sym}(V \otimes V) \oplus \text{AntSym}(V \otimes V) = V \otimes V \quad (16)$$

Proof. Sei $x \in \text{Sym}(V \otimes V) \cap \text{AntSym}(V \otimes V)$. Dann gilt $x = T(x) = -x$. Also $x = 0$.

Sei $x \in V \otimes V$ beliebig. Dann ist

$$x = \frac{1}{2}(x + T(x)) + \frac{1}{2}(x - T(x)) \quad (17)$$

Merke dass $x + T(x) \in \text{Sym}(V \otimes V)$ und $x - T(x) \in \text{AntSym}(V \otimes V)$:

$$T(x + T(x)) = T(x) + T^2(x) = T(x) + x = x + T(x) \quad (18)$$

$$T(x - T(x)) = T(x) - T^2(x) = T(x) - x = -(x - T(x)) \quad (19)$$

□

Remark 3. Dementsprechend definiert man den symmetrischen Teil und antisymmetrischen Teil eines Tensorproduktes auch als

$$\text{AntSym}(V \otimes V) := V \otimes V / \text{Sym}(V \otimes V) \quad (20)$$

$$\text{Sym}(V \otimes V) := V \otimes V / \text{AntSym}(V \otimes V) \quad (21)$$

Proposition 4. Sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V . Dann gilt folgendes:

(1) $v_i \otimes v_j + v_j \otimes v_i$ für $1 \leq i \leq j \leq n$ bilden eine Basis für $\text{Sym}(V \otimes V)$. Die Dimension von $\text{Sym}(V \otimes V)$ ist $\frac{n(n+1)}{2} = \binom{n}{2}$.

(2) $v_i \otimes v_j - v_j \otimes v_i$ für $1 \leq i < j \leq n$ bilden eine Basis für $\text{AntSym}(V \otimes V)$. Die Dimension von $\text{AntSym}(V \otimes V)$ ist $\frac{n(n-1)}{2} = \binom{n+2-1}{2}$.

Proof. Unterlassen. □

3 Charakter von $V \otimes W$

Von nun an fixieren wir den Körper als \mathbb{C} . Viele Ergebnisse können wohl auch verallgemeinert werden; zumindest auf einen Körper, dessen Charakteristik nicht die Gruppenordnung teilt.

Proposition 5. Seien V und W zwei CG-Moduln mit Charakter φ und χ , respektiv. Dann ist der Charakter $\varphi\chi$ von $V \otimes W$ gegeben durch

$$\varphi\chi(g) = \varphi(g)\chi(g) \quad \forall g \in G. \quad (22)$$

Proof. Nach Prop. 9.11 [JL]⁴ existieren Basen e_1, \dots, e_n und f_1, \dots, f_m mit

$$g \cdot e_i = \lambda_i e_i \quad g \cdot f_j = \mu_j f_j \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\} \quad (23)$$

⁴Da der vorliegende Beweis die Proposition 9.11, und damit wiederum das Lemma von Schur benutzt ist zumindest ein alg. abgeschlossener Körper nötig. Lt. Prof. Dr. C. Liedtke gilt das Resultat für allgemeine Körper.

und damit $\varphi(g) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ und $\chi(g) = \sum_{j=1}^m \mu_j$. Also

$$g \cdot (e_i \otimes f_j) = g \cdot e_i \otimes g \cdot f_j = \lambda_i e_i \otimes \mu_j f_j = \lambda_i \mu_j (e_i \otimes f_j) \quad . \quad (24)$$

Ist also ψ der Charakter von $V \otimes W$, dann

$$\psi(g) = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) \left(\sum_{j=1}^m \mu_j \right) = \varphi(g) \chi(g) \quad . \quad (25)$$

□

Corollary 1. *Damit ist als $\varphi\chi$ ebenfalls ein Charakter von G .*

Potenzen von Charakteren

Definition 6. Sei χ ein Charakter von G . Dann definiere

$$\chi^n(g) = (\chi(g))^n \quad \forall g \in G \quad . \quad (26)$$

Damit auch $\chi^0 := 1_G$ den trivialen Charakter.

Theorem 1. *Sei χ ein treuer Charakter von G und sei $\text{Bild}(\chi) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$, lasse also $\chi(g)$ genau r verschiedene Werte annehmen. Dann gilt für jeden irred. Charakter ψ von G : $\exists j \in \{0, \dots, r-1\}$ sodass ψ eine Komponente von χ^j ist. Also $\langle \chi^j, \psi \rangle \neq 0$ für ein $j \in \{0, \dots, r-1\}$*

Proof. Definiere $G_i := \chi^{-1}(\alpha_i)$ für $1 \leq i \leq r$ und setze die Indizes so, dass $1 \in G_1$. Dann ist $G_1 = \ker \chi = \{1\}$, da χ treu ist. Sei nun ψ ein beliebiger irred. Charakter von G und definiere

$$\beta_i := \sum_{g \in G_i} \overline{\psi(g)} \quad (27)$$

und merke $\beta_1 = \psi(1) \neq 0$, da ein irreduzibler $\mathbb{C}G$ -Modul per Definition nicht trivial ist. Für $j \geq 1$ gilt nun per Definition des inneren Produktes:

$$\langle \chi^j, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi^j(g) \overline{\psi(g)} \quad (28)$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^r \sum_{g \in G_i} (\chi(g))^j \overline{\psi(g)} \quad (29)$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^r \underbrace{(\chi(g))^j}_{=(\alpha_i)^j} \underbrace{\sum_{g \in G_i} \overline{\psi(g)}}_{=\beta_i} \quad (30)$$

wobei der 3. Schritt folgt, da χ per Definition der G_i konstant auf G_i ist. Betrachte nun die $r \times r$ -Matrix $A := (a_i^{j-1})$, sowie den Vektor $b := (\beta_i)$. Dann ist A eine Vandermonde-Matrix und daher invertierbar. Merke nun außerdem, dass

$$\langle \chi^j, \psi \rangle |G| = \sum_{i=0} a_i^{j+1} b_i \quad (31)$$

Da $\beta_1 \neq 0$ ist der Vektor $b \neq 0$. Da A invertierbar ist, gilt damit auch $\sum_{i=0} a_i^{j+1} b_i \neq 0$ für ein $0 \leq j \leq r-1$ und damit $\langle \chi^j, \psi \rangle \neq 0$ für zumindest ein $0 \leq j \leq r-1$. \square

Example 2. Betrachte eine endliche Gruppe $G \neq \{1\}$ und den regulären Charakter χ_{reg} dieser Gruppe. Dann gilt $\text{Bild}(\chi_{\text{reg}}) = \{0, |G|\}$. Daher ist jeder irred. Charakter eine Komponente von 1_G oder χ_{reg} , was schon gezeigt wurde.

4 Charaktere von $\text{Sym}(V \otimes V)$ und $\text{AntSym}(V \otimes V)$

Sei V ein $\mathbb{F}G$ -Modul, χ sein Charakter und χ_{Sym} und χ_{AntSym} die Charaktere des symmetrischen und des antisymmetrischen Teil, respektive. Dann folgt aus Proposition 3:

$$\chi^2 = \chi_{\text{Sym}} + \chi_{\text{AntSym}} \quad (32)$$

Ferner lässt sich sagen

Proposition 6. *Sei G eine endliche Gruppe, V ein $\mathbb{C}G$ Modul⁵, χ der Charakter von V*

⁵Auch hier wird Prop. 9.11 verwendet. Wieder gilt das Resultat aber für allgemeine Körper.

und $\chi_{Sym}(g)$ und $\chi_{AntSym}(g)$ die Charaktere des symmetrischen und antisymmetrischen Anteils, repektive. Dann gilt

$$\chi_{Sym}(g) = \frac{1}{2}(\chi^2(g) + \chi(g^2)) \quad (33)$$

$$\chi_{AntSym}(g) = \frac{1}{2}(\chi^2(g) - \chi(g^2)) \quad (34)$$

Proof. Sei $g \in G$ beliebig. Nach Proposition 9.11 [JL] bzw. Proposition 3.10 in Vortrag 3 (S. Spindler) existiert eine Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ von V s.d. $g.e_i = \lambda_i e_i$ für ein $\lambda_i \in \mathbb{C}$. Daher

$$g.(e_i \otimes e_j - e_i \otimes e_j) = g.(e_i \otimes e_j) - g.(e_i \otimes e_j) \quad (35)$$

$$= (g.e_i \otimes g.e_j) - (g.e_i \otimes g.e_j) \quad (36)$$

$$= (\lambda_i e_i \otimes \lambda_j e_j) - (\lambda_i e_i \otimes \lambda_j e_j) \quad (37)$$

$$= \lambda_i \lambda_j (e_i \otimes e_j - e_i \otimes e_j) \quad (38)$$

$$(39)$$

Merke dass g diagonal ist. Damit folgt

$$\chi_{AntSym}(g) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j \quad (40)$$

Betrachte nun $\chi(g^2)$ und $\chi^2(g)$ (also den Charakter auf V)

$\chi(g^2)$: Merke zunächst $g^2.e_i = g.g.e_i = g.(\lambda_i e_i) = \lambda_i g.e_i = \lambda_i^2 e_i$. Damit folgt $\chi(g) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$

und $\chi(g^2) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$

$\chi^2(g)$: Es gilt

$$\chi^2(g) = (\chi(g))^2 = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j = \chi(g^2) + 2\chi_{AntSym}(g) \quad (41)$$

Daher

$$\chi_{\text{AntSym}}(g) = \frac{1}{2}(\chi^2(g) - \chi(g^2)) \quad . \quad (42)$$

Mittels $\chi^2(g) = \chi_{\text{Sym}}(g) + \chi_{\text{AntSym}}(g)$ folgt daher weiters

$$\chi_{\text{Sym}}(g) = \frac{1}{2}(\chi^2(g) + \chi(g^2)) \quad . \quad (43)$$

□

5 Charaktere direkter Produkte

Mit Hilfe des Tensorproduktes lassen sich auch die Darstellungen direkter Produkte von endlichen Gruppen angeben.

Definition 7. Seien G und H endliche Gruppen, $G \times H$ deren direktes Produkt und \mathbb{F} ein Körper, sowie V und W zugehörige $\mathbb{F}G$ -Moduln mit Basen $\{v_1, \dots, v_n\}$ und $\{w_1, \dots, w_m\}$, respektive. Dann definiere für alle $(g, h) \in G \times H$ die Wirkung auf $V \otimes W$ durch die Wirkung auf der Basis mittels

$$(g, h).(v_i \otimes w_j) = g.v_i \otimes h.w_j \quad (44)$$

und erweitere linear auf $V \otimes W$. Diese Konstruktion definiert den induzierten $\mathbb{F}G$ -Modul $V \otimes W$.

Proposition 7. $V \otimes W$ ist zusammen mit der oben definierten Gruppenwirkung ein $\mathbb{F}(G \times H)$ -Modul. Seien weiters ϕ und ψ die Charaktere von V und W , respektive. Dann gilt für den Charakter $\phi \times \psi$ von $V \otimes W$:

$$(\phi \times \psi)(g, h) = \phi(g)\psi(h) \quad , \quad (g, h) \in G \times H \quad (45)$$

Proof. Analog zu Prop. 19.5 [JL] und 19.6 [JL]. □

Theorem 2. Seien ϕ_1, \dots, ϕ_r und ψ_1, \dots, ψ_s die irreduziblen Charaktere von G und H , respektive. Dann sind

$$\phi_i \times \psi_j \quad 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s \quad (46)$$

die irreduziblen Charaktere von $G \times H$.

Proof. Betrachte für $1 \leq i, k \leq r$ und $1 \leq j, l \leq s$ die inneren Produkte

$$\langle \phi_i \times \psi_j, \phi_k \times \psi_l \rangle_{G \times H} = \frac{1}{|G \times H|} \sum_{h \in H, g \in G} \phi_i(g) \psi_j(h) \overline{\phi_k(g) \psi_l(h)} \quad (47)$$

$$= \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \phi_i(g) \overline{\phi_k(g)} \right) \left(\frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \psi_j(h) \overline{\psi_l(h)} \right) \quad (48)$$

$$= \langle \phi_i, \phi_k \rangle_G \langle \psi_j, \psi_l \rangle_H \quad (49)$$

$$= \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (50)$$

Dabei bezeichnet $\langle \cdot, \cdot \rangle_K$ das innere Produkt auf dem Raum der Klassenfunktionen von K nach \mathbb{C} . Somit folgt, dass die rs Charaktere $\phi_i \times \psi_j$ wieder verschieden und irreduzible sind. Es ist also nur noch zu zeigen, dass $G \times H$ nur rs verschiedene irreduzible Charaktere hat. Merke dazu dass $\forall x, g \in G, h, y \in H$ gilt

$$(x, y)^{-1}(g, h)(x, y) = (x^{-1}gx, y^{-1}hy) \quad (51)$$

Also sind Elemente $(g, h), (g', h') \in G \times H$ genau dann konjugiert wenn g zu g' und h zu h' konjugiert ist. Insbesondere sind daher die Vertreter der Konjugationsklassen von $G \times H$ die Elemente $(g_i, h_j) \in G \times H$ mit $1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s$ wobei die g_i und die h_j die Vertreter der Konjugationsklassen in G und H , respektive, sind. Damit ist die Anzahl der Konjugationsklassen und damit der irreduziblen Moduln gleich sr . Die vorhin angegebenen irreduziblen Charaktere sind daher tatsächlich alle. \square

6 Darstellungsring

Sei G eine endliche Gruppe mit n Konjugationsklassen. Dann ist bekannt, dass für beliebige $\mathbb{F}G$ Moduln U, V, W mit Charakteren ϕ und ψ , respektive, gilt

- $\{0\} \oplus V \simeq V$ mit Charakter ϕ
- $V \oplus W$ ist wieder ein $\mathbb{F}G$ Modul mit dem Charakter $\phi\psi$
- $V \oplus W \simeq W \oplus V$ mit eindeutigen Isomorphismus
- $U \oplus (V \oplus W) \simeq (U \oplus V) \oplus W$ mit eindeutigen Isomorphismus

Die Menge der \mathbb{F} -Vektorräume bildet also einen kommutativen Monoid bezüglich direkter Summe. Außerdem wurde oben gezeigt:

- $\mathbb{F} \otimes V \simeq V$ mit Charakter ϕ
- $V \otimes W$ ist wieder ein $\mathbb{F}G$ Modul mit dem Charakter
- $V \otimes W \simeq W \otimes V$ mit eindeutigen Isomorphismus
- $U \otimes (V \otimes W) \simeq (U \otimes V) \otimes W$ mit eindeutigen Isomorphismus
- $U \otimes (V \oplus W) \simeq (U \otimes V) \oplus (U \otimes W)$ mit eindeutigen Isomorphismus

Die Menge der \mathbb{F} -Vektorräume bildet also einen kommutativen Monoid bezüglich Tensorprodukten. Außerdem ist \otimes distributiv über \oplus . Betrachte nun die folgende Menge

$$H(G) := \left\{ \sum_{i=1}^n a_i V_i \mid a_i \in \mathbb{N}, V_i \text{ irred. } \mathbb{F}G\text{-Modul} \right\} \quad (52)$$

Die Operationen \oplus und \otimes gibt $H(G)$ die Struktur eines Halbrings⁶. Es geht noch besser!

⁶Die Notation $H(G)$ ist nicht Standard!

Gruppenvervollständigung

Definition 8. (Universelle Eigenschaft) Sei $(M, +)$ ein kommutativer Monoid. Dann nennt man eine abelsche Gruppe K mit einem Monoidhomomorphismus $i : M \rightarrow K$ eine **Gruppenvervollständigung** wenn für eine beliebige abelsche Gruppe A mit Monoidhomomorphismus $f : M \rightarrow A$ ein eindeutiger Gruppenhomomorphismus $\psi : K \rightarrow A$ existiert sodass $f = \psi \circ i$. Also wenn das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{i} & K \\
 & \searrow f & \downarrow \exists! \psi \\
 & & A
 \end{array}$$

Durch die universelle Eigenschaft ist eine Gruppenvervollständigung bis auf eindeutigen Isomorphismus eindeutig bestimmt. Daher bezeichnen wir sie als **die** Gruppenvervollständigung. Sie existiert immer.

In diesem Sinne ist K die "kleinste" abelsche Gruppe, welche M "enthält".

Die Gruppenvervollständigung eines Monoids hat eine explizite Konstruktion:

Die Menge $M \times M / \sim$ mit der Operation $(m_1, m_2) + (n_1, n_2) = (m_1 + n_1, m_2 + n_2)$ und der Äquivalenzrelation

$$(m_1, m_2) \sim (n_1, n_2) \Leftrightarrow \exists k \in M : m_1 + n_2 + k = m_2 + n_1 + k \quad . \quad (53)$$

ist die Gruppenvervollständigung⁷ von $(M, +)$. Das Identitätselement in $M \times M / \sim$ ist $(0, 0)$.

In üblicher Notation gilt daher $(m_1, m_2) = -(m_2, m_1)$.

Example 3. Betrachte den Monoid $(\mathbb{N}, +)$. Die zugehörige Gruppenvervollständigung ist $(\mathbb{Z}, +)$.

Die allgemeine Konstruktion dieses Konzeptes ist die **Grothendieck Gruppe**⁸

Wendet man das nun auf $(H(G), \oplus)$ an erhält man eine abelsche Gruppe und damit einen kommutativen Ring $(H(G), \oplus, \otimes)$. Man nennt diesen Ring **den Ring der Darstellungen von G**

⁷Merke dass das bis auf die Existenz von k die gleiche Definition ist wie jene der Konstruktion der ganzen Zahlen aus den natürlichen Zahlen. I.A. ist allerdings nicht der Fall dass $m + k = n + k \Rightarrow m = n$. Vgl. Konstruktion der Lokalisierung vs. Quotientenkörper.

⁸Da sie wohl auch durch eine universelle Eigenschaft definiert ist, ist auch sie bis auf eindeutigen Isomorphismus bestimmt. Die Existenz ist nicht zwingend gegeben!

(über \mathbb{F}) und schreibt $R(G)$. Die Elemente von $R(G)$ nennt man **virtuelle** Darstellungen. Die irreduziblen Darstellungen bilden ein Erzeugersystem für $R(G)$. Zwei Elemente in $R(G)$ sind gleich, wenn sie isomorph als $\mathbb{F}G$ Moduln sind.

Sei nun $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Dann folgt aus den obigen Definitionen und Konstruktionen nun auf natürliche Weise der Ringhomomorphismus

$$\chi : R(G) \rightarrow \mathbb{C}_{\text{class}}(G), \quad \sum_{i=1}^n a_i V_i \mapsto \sum_{i=1}^n a_i \chi_i \quad (54)$$

Da ein $\mathbb{C}G$ einen eindeutigen Charakter hat ist die Abbildung χ injektiv. Die Bilder von χ nennt man **virtuelle** Charaktere von G .

Der Darstellungsring einer Gruppe ist i.A. nicht frei als \mathbb{Z} -Modul, was das nächste Beispiel zeigt.

Example 4. Definiere $C_n := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Der Darstellungsring $R(C_n)$ über \mathbb{C} ist isomorph zu $\mathbb{Z}[x]/(x^n - 1)$ mit der folgenden Abbildung. Sei $C_n = \langle g \rangle$. Sei $V := \mathbb{C}$ mit der Gruppenwirkung definiert durch $g.v := e^{\frac{2\pi i}{n}} v$ für ein beliebiges $v \in V$. Notwendig ist hier nur dass g die Wirkung einer primitiven n -ten Einheitswurzel hat. Definiere nun den Ringhomomorphismus $\alpha : R(C_n) \rightarrow \mathbb{Z}[x]/(x^n - 1)$ auf dem Erzeuger durch $V \mapsto x$. Dann betrachte die Abbildung $\alpha : R(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}[x]/(x^n - 1)$.

References

- [FH] W. Fulton, J. Harris, *Representation theory. A first course*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 129, Springer-Verlag, 1991.
- [I] I. M. Isaacs, *Character Theory of Finite Groups*, Corrected reprint of the 1976 original, Dover Publications (1994).
- [JL] G. James, M. Liebeck, *Representations and characters of groups. Second edition*, Cambridge University Press, 2001.
- [S] J.-P. Serre, *Linear representations of finite groups*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 42, Springer-Verlag, 1977.